提要 245：二度空間的格林定理(Green's Theorem)

向量有兩大定理，一為散度定理(Divergence Theorem)，一為史托克定理(Stokes' Theorem)。其中史托克定理若化簡為 xy 平面上之定理，則又常被稱之為格林定理(Green's Theorem)。格林定理為本單元之研討重點，說明如下。

格林定理(Green's Theorem)

已知在 xy 平面上，向量函數 $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j}$、曲線 C 可表為 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$。在如圖 1 所示定義域中，若 $F_1(x, y)$、$F_2(x, y)$、$\partial F_1/\partial y$、$\partial F_2/\partial x$ 等在定義域中為連續函數，則：

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C (F_1 dx + F_2 dy) \tag{1}$$

上式亦可表為：

$$\iint_R (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k}\, dxdy = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

其中 C 為 R 之邊界，且在線積分之過程中，積分方向需永遠保持定義域在積分曲線之左手邊。

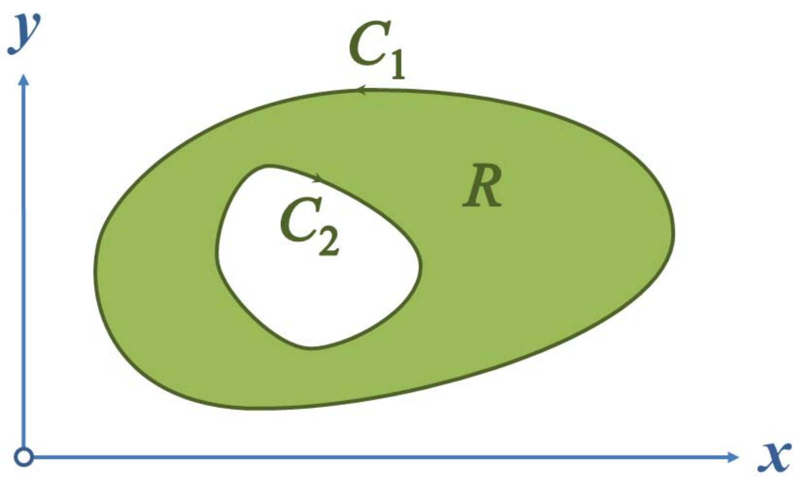

圖 1　格林定理中 C_1 與 C_2 之線積分方向示意圖

【附註】格林定理應滿足三個條件：

❶ $F_1(x, y)$、$F_2(x, y)$、$\partial F_1/\partial y$、$\partial F_2/\partial x$ 等在定義域中為連續函數。

❷ 在線積分之過程中，積分方向需永遠保持定義域在積分曲線之左手邊。

❸ R 有封閉之邊界 C。

範例一

已知 $F_1 = y^2 - 7y$ 、 $F_2 = 2xy + 2x$，曲線 C 為 $x^2 + y^2 = 1$，試引用格林定理證明 $\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C \left(F_1 dx + F_2 dy \right)$，其中 R 與 C 如圖 2 所示。

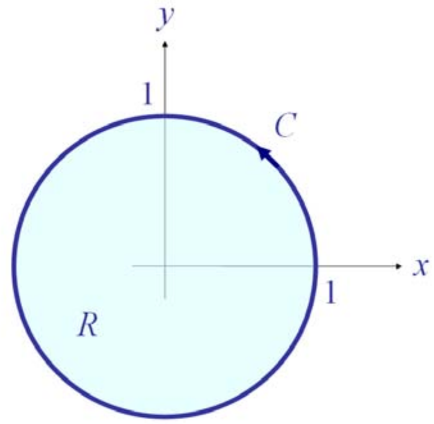

圖 2　積分區域 R 及其邊界曲線 C 之示意圖

證明：

由格林定理知：

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint_C \left(F_1 dx + F_2 dy \right) \tag{3}$$

已知：

$$F_1 = y^2 - 7y \text{ 、 } F_2 = 2xy + 2x \tag{4}$$

故式(3)等號左邊可表為：

$$\iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy = \iint_R \left[\frac{\partial(2xy+2x)}{\partial x} - \frac{\partial\left(y^2-7y\right)}{\partial y} \right] dxdy$$
$$= \iint_R [2-(-7)]\,dxdy$$
$$= \iint_R 9\,dxdy \tag{5}$$
$$= 9 * (\text{Area of } R)$$
$$= 9\pi$$

而式(3)等號右邊之計算如下：

$$\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) = \oint_C \left[\left(y^2 - 7y\right)dx + (2xy+2x)dy\right] \tag{6}$$

可以用一個參數 t 描述曲線 C，亦即可令：

$$x = \cos t \text{ 、 } y = \sin t \text{ 、 } 0 \le t < 2\pi \tag{7}$$

故式(7)可改寫為：

$$\begin{aligned}
\oint_C (F_1 dx + F_2 dy) &= \oint_C \left[\left(y^2 - 7y\right)dx + (2xy+2x)dy\right] \\
&= \oint_C \left[\left(\sin^2 t - 7\sin t\right)d(\cos t) + (2\sin t\cos t + 2\cos t)d(\sin t)\right] \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(\sin^2 t - 7\sin t\right)(-\sin t dt) + (2\sin t\cos t + 2\cos t)(\cos t dt)\right] \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(-\sin^3 t + 7\sin^2 t\right) + \left(2\sin t\cos^2 t + 2\cos^2 t\right)\right] dt \\
&= \left[\frac{1}{3}\cos t\left(2+\sin^2 t\right) + 7\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t\right) - \frac{2}{3}\cos^3 t + 2\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\right]_0^{2\pi} \\
&= 9\pi
\end{aligned} \tag{8}$$

式(5)之計算結果與式(8)之計算結果相等，故得證。