提要 244：由推求微小面積 $d\mathbf{A}$ 的方法建立 Jacobian

曲面座標系統中之微小面積 $d\mathbf{A}$ 的表達方式是整個面積分之核心關鍵之處，也可應用以建立 Jacobian 的觀念，說明如下。

由推求微小面積 $d\mathbf{A}$ 的方法建立 Jacobian

已知面積分之座標轉換可表為：

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f[x(u,v), y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du dv \tag{1}$$

令 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)$ 表一曲面，如圖 1 所示，則曲面上之微小面積 $d\mathbf{A}$ 可表為：

$$d\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} du dv \tag{2}$$

而微小面積之大小 dA 即為 $|d\mathbf{A}|$，而 $|d\mathbf{A}|$ 可示為：

$$|d\mathbf{A}| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du dv \tag{3}$$

故之前所定義之 Jacobian 可改寫為：

$$\text{Jacobian} = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \tag{4}$$

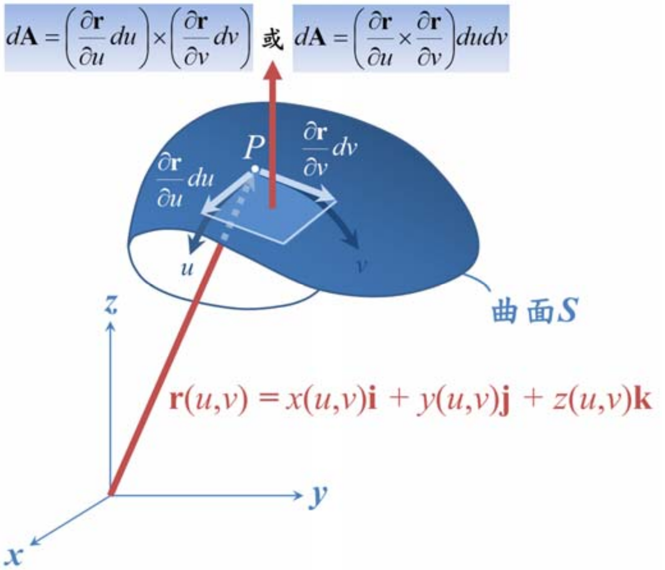

圖 1　在曲面 $\mathbf{r}(u,v)$ 上取微小面積元素示意圖

範例一

試將 xy 平面之面積分 $\iint_R f(x,y)\,dxdy$ 改寫為極座標 (r,θ) 平面之面積分。

解答：

由之前的討論知：

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f[x(u,v), y(u,v)]\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| dudv \tag{5}$$

已知：

$$x = u\cos v \text{ 、 } y = u\sin v \tag{6}$$

故以 (u,v) 為變數之曲面可表為：

$$\mathbf{r}(u,v) = u\cos v\,\mathbf{i} + u\sin v\,\mathbf{j} \tag{7}$$

根據式(4)知 $\text{Jacobian} = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|$ ，所以：

$$\begin{aligned}
\text{Jacobian} &= \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \\
&= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \\
&= \left| \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial x/\partial u & \partial x/\partial v & 0 \\ \partial y/\partial u & \partial y/\partial v & 0 \end{vmatrix} \right| \\
&= \left| \left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right)\mathbf{k} \right| \\
&= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2} \\
&= \sqrt{[(\cos v)(u\cos v) - (-u\sin v)(\sin v)]^2} \\
&= u
\end{aligned} \tag{8}$$

式(8)代入式(5)，則式(5)可改寫為：

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f[x(u,v), y(u,v)]\,u\,du\,dv \tag{9}$$

將符號u改寫為r、符號v改寫為θ，則上式亦可調整為常見之型態：

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \iint_R f(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta \tag{10}$$

此即為問題之解答。