# 提要 243：面積分與 Jacobian

當面積分之積分變數作調整時，需引用 Jacobian 的觀念，說明如下。

**面積分與 Jacobian**

令 $x = x(u,v)$、$y = y(u,v)$，若將函數 $f(x,y)$ 對 $x$、$y$ 之面積分改寫為對 $u$、$v$ 之面積分，則其面積分之調整如以下所示：

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f[x(u,v), y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv \tag{1}$$

其中 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 即稱之為 Jacobian，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ 亦常表為 $J\left(\dfrac{x,y}{u,v}\right)$。

| 範例一 |
| --- |
| 試將 $xy$ 之面積分 $\iint_R f(x,y)dxdy$ 改寫為極座標 $(r,\theta)$ 平面之面積分。 |

解答：

由之前的討論知：

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f[x(r,\theta),y(r,\theta)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta \qquad (2)$$

已知：

$$x = r\cos\theta \text{ 、 } y = r\sin\theta \qquad (3)$$

故式(2)中之 Jacobian 可表為：

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r \qquad (4)$$

式(4)代入式(2)，則式(2)可改寫為：

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_R f(r,\theta)rdrd\theta}$$

此即為題意之所求。