提要 242：純量函數之面積分

在幾何學上，線積分之意義可解釋為求面積，而面積分之意義可解釋為求體積，說明如下。

純量函數之面積分

令 R 為積分區域，則純量函數 $f(x,y)$ 之面積分可表為：

$$\iint_R f(x,y)dxdy \quad 或 \quad \iint_R f(x,y)dA$$

其幾何意義為計算函數 $f(x,y)$ 與 xy 平面間所包含的體積，如圖 1 所示。

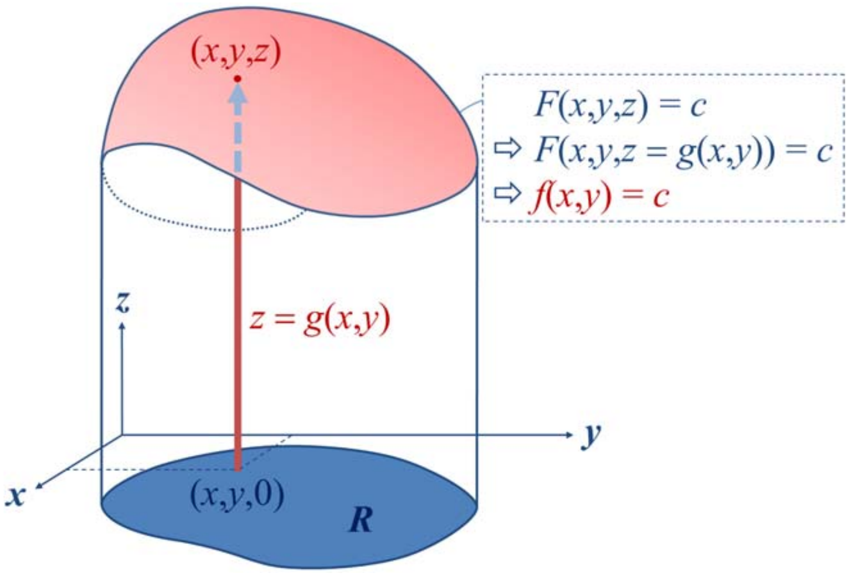

圖 1　面積分 $\iint_R f(x,y)dxdy$ 相當於計算函數 $f(x,y)$ 與 xy 平面間所包含的體積

【附註】

面積分 $\iint_R f(x,y)dxdy$ 有許多基本性質，包括：

- 若 k 為常數，則 $\iint_R kf(x,y)dxdy = k\iint_R f(x,y)dxdy$。
- $\iint_R [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_R f(x,y)dxdy + \iint_R g(x,y)dxdy$
- $\iint_{R_1+R_2} f(x,y)dxdy = \iint_{R_1} f(x,y)dxdy + \iint_{R_2} f(x,y)dxdy$

■ 積分中值定理：積分區域 R 中一定存在一點 (x_0, y_0)，使得 $\iint_R f(x,y)\,dxdy = f(x_0, y_0)A$，其中 A 為積分區域之面積。

■ 如圖 2 所示之積分可表為：$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$

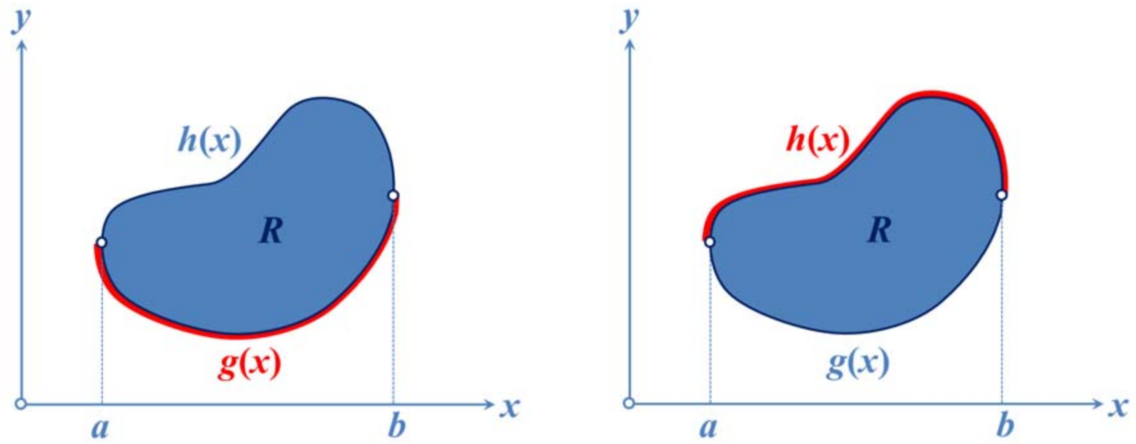

圖 2　函數 $f(x,y)$ 之積分考慮方式

■ 如圖 3 所示之積分可表為：$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)\,dx\right] dy$

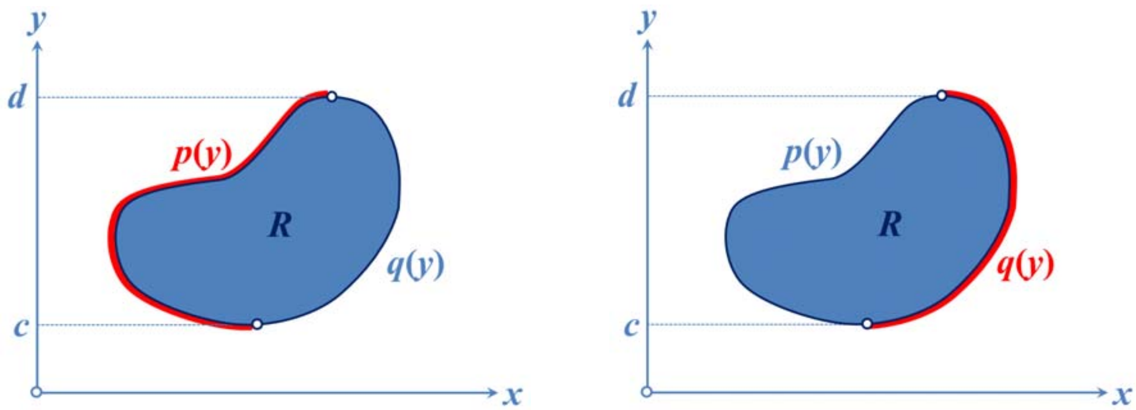

圖 3　函數 $f(x,y)$ 之另一種積分考慮方式