提要 241：與積分路徑無關之線積分的判斷方法

如之前所述，有些現象與路徑無關，本單元擬說明其判斷方法，說明如下。

線積分與積分路徑無關之判斷方法

令線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C \left(F_1dx+F_2dy+F_3dz\right)$ 中之 F_1、F_2、F_3 及其一階導數在定義域中為連續函數。若 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 與積分路徑無關，則 $F_1dx+F_2dy+F_3dz$ 稱為正合(Exact)。線積分與積分路徑無關之判斷條件有兩個：

❶ $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$；

❷ 定義域為單閉區間。

範例一

試證明線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C (2xdx+2ydy+4zdz)$ 由 $a:(0,0,0)$ 積分至 $b:(2,2,2)$ 之積分與積分路徑無關。其中 C_1 可表為 $\mathbf{r}=2t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$ 、 $0\le t\le 1$ ， C_2 可表為 $\mathbf{r}=2t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}$ 、 $0\le t\le 1$ 。

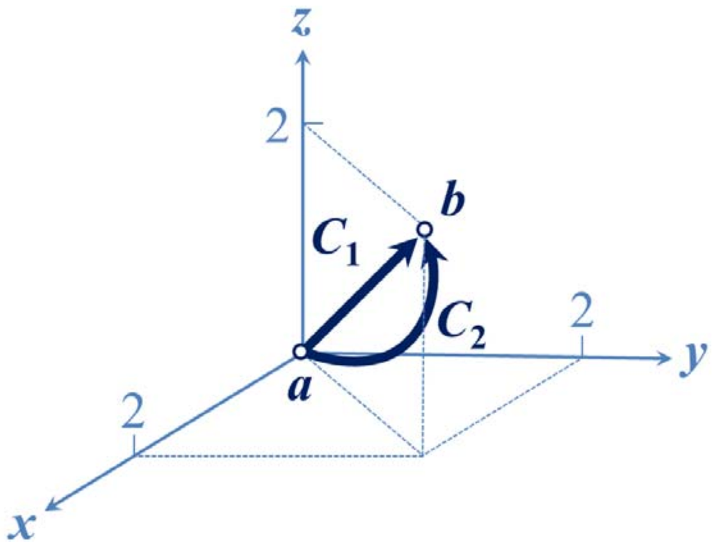

圖 1　積分曲線 C_1 與 C_2 的示意圖

證明：

本題擬用判斷式作判斷，有兩個條件需檢查：❶ $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ ；❷定義域為單閉區間。

❶ $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ 之檢查

$$\nabla\times\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2x & 2y & 4z\end{vmatrix}=0\mathbf{i}+0\mathbf{j}+0\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

❷ 定義域為單閉區間之檢查

函數 $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$ 中之 (x,y,z) 可以隨意代入任意之點，亦即對函數 $\mathbf{F}$ 而言，整個空間都沒有任何破洞與裂縫，故整個空間對函數 $\mathbf{F}$ 而言是一個單閉區間。

以上兩條件都滿足，故此一線積分問題與積分路徑無關。

【另證】

由題意知$\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$，今考慮$\mathbf{F}=\nabla f$，即：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\\[2mm]\dfrac{\partial f}{\partial z}=4z\end{cases}$$

上式分別對x、y、z作積分，則可得：

$$\begin{cases}f=\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\int 2xdx+l(y,z)=x^2+l(y,z)\\[2mm] f=\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int 2ydy+m(x,z)=y^2+m(x,z)\\[2mm] f=\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\int 4zdz+n(x,y)=2z^2+n(x,y)\end{cases}$$

再選擇$l(y,z)=y^2+2z^2$、$m(x,z)=x^2+2z^2$、$n(x,y)=x^2+y^2$，則

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$$

因確實存在$f(x,y,z)$，使得$\mathbf{F}=\nabla f$，故原問題與積分路徑無關。