提要 239：與積分路徑無關之線積分的意義

與積分路徑無關之線積分(Line Integral)是一個相當重要的觀念！在宇宙中，有些現象之價值重在其起點與終點的位置，而不是在於經過之過程。以物理為例，重力場之作功(Work)量即為此類問題之代表。

定理一：與積分路徑無關

若向量函數 $\mathbf{F}$ 在定義域(Domain)中為連續函數，且函數 $\mathbf{F}$ 之線積分與積分路徑無關，則必定是向量函數 $\mathbf{F}$ 為某一純量函數 f 的梯度(Gradient)，亦即：

$$\mathbf{F} = \text{grad } f = \nabla f \tag{1}$$

【證明】

因為 $\mathbf{F} = \text{grad } f = \nabla f$ ，所以 $F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}$ ，故：

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}\right)\cdot d\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\right) \\
&= \int_C \left(F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}\right)\cdot\left(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}\right) \\
&= \int_C \left(F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz\right) \\
&= \int_C \left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right) \\
&= \int_C df
\end{aligned}$$

若考慮積分之上下，則上式可再改寫為：

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C df \\
&= \int_A^B df \\
&= f\Big|_A^B \\
&= f(B) - f(A)
\end{aligned}$$

故得證。

定理二：與積分路徑無關

若線積分值與積分路徑無關，則其封閉路線(Closed Contour)之積分值為零。

範例一

試證明線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\int_C (2xdx+2ydy+4zdz)$ 由 $a:(0,0,0)$ 積分至 $b:(2,2,2)$ 之積分值與積分路徑無關。其中 C_1 可表為 $\mathbf{r}=2t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$ 、 $0\le t\le 1$ ， C_2 可表為 $\mathbf{r}=2t\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+2t^2\mathbf{k}$ 、 $0\le t\le 1$ 。

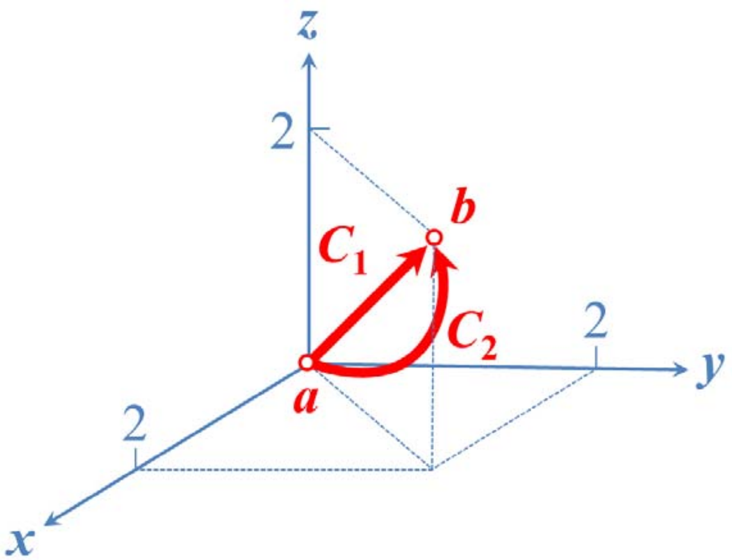

圖 1　積分曲線 C_1 與 C_2 的示意圖

證明：

由線積分之定義知：

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot d(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \\
&= \int_C (2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+4z\mathbf{k})\cdot(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}) \\
&= \int_C (2xdx+2ydy+4zdz)
\end{aligned} \tag{2}
$$

沿積分曲線 C_1 之線積分值

已知 C_1 可表為 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ 、 $0 \le t \le 1$，亦即：

$$x = 2t \text{ 、 } y = 2t \text{ 、 } z = 2t \text{ 、 } 0 \le t \le 1 \tag{3}$$

將式(3)代入式(2)可得：

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (2xdx + 2ydy + 4zdz) \\
&= \int_0^1 [4td(2t) + 4td(2t) + 8td(2t)] \\
&= \int_0^1 [8t + 8t + 16t] dt \\
&= \int_0^1 32tdt \\
&= 16t^2 \Big|_0^1 \\
&= 16
\end{aligned}$$

沿積分曲線 C_2 之線積分值

已知 C_2 可表為 $\mathbf{r} = 2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 2t^2\mathbf{k}$ 、 $0 \le t \le 1$，亦即：

$$x = 2t \text{ 、 } y = 2t \text{ 、 } z = 2t^2 \text{ 、 } 0 \le t \le 1 \tag{4}$$

將式(4)代入式(2)可得：

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (2xdx + 2ydy + 4zdz) \\
&= \int_0^1 [4td(2t) + 4td(2t) + 8t^2d(2t^2)] \\
&= \int_0^1 [8t + 8t + 32t^3] dt \\
&= \int_0^1 (16t + 32t^3) dt \\
&= (8t^2 + 8t^4) \Big|_0^1 \\
&= 16
\end{aligned}$$

找一個純量函數 f 使 $\mathbf{F}=\nabla f$

由題意知 $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+4z\mathbf{k}$，今考慮 $\mathbf{F}=\nabla f$，即：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}=2x\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=2y\\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=4z\end{cases}$$

上式分別對 x、y、z 作積分，則可得：

$$\begin{cases}f=\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial x}dx=\int 2xdx+l(y,z)=x^2+l(y,z)\\ f=\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial y}dy=\int 2ydy+m(x,z)=y^2+m(x,z)\\ f=\displaystyle\int\frac{\partial f}{\partial z}dz=\int 4zdz+n(x,y)=2z^2+n(x,y)\end{cases}$$

再選擇 $l(y,z)=y^2+2z^2$、$m(x,z)=x^2+2z^2$、$n(x,y)=x^2+y^2$，則

$$f(x,y,z)=x^2+y^2+2z^2$$

因確實存在 $f(x,y,z)$，使得 $\mathbf{F}=\nabla f$，故原問題與積分路徑無關。而其積分值為：

$$\begin{aligned}\int_C\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}&=\int_C(2xdx+2ydy+4zdz)\\&=\int_A^B df\\&=f(x,y,z)\Big|_{A(0,0,0)}^{B(2,2,2)}\\&=\left(x^2+y^2+2z^2\right)\Big|_{A(0,0,0)}^{B(2,2,2)}\\&=4+4+8\\&=16\end{aligned}$$

答案亦相同，故得證。