提要 238：向量函數在空間上之線積分的方法

空間上與平面上之線積分其實只差一個分量罷了，但是多一個分量就是立體問題了，對某些讀者來說可能較難以在頭腦中建構出曲線函數的圖形，其實除了簡單曲線作者有能力在腦袋中想像以外，很多也有賴電腦繪圖的幫助，讀者不必擔心這一類的問題就是了，說明如下。

向量函數在空間上之線積分

向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(x,y,z)\mathbf{i} + F_2(x,y,z)\mathbf{j} + F_3(x,y,z)\mathbf{k}$ 沿 xyz 空間上之曲線 C 的線積分(Line Integral)是定義為：

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中曲線 C 是以 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ 加以表示。

範例一

試求向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ 沿圖 1 所示之螺旋曲線 C 的線積分 $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$，其中螺旋曲線 C 可表為 $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ 、 $0 \le t \le 2\pi$ 。

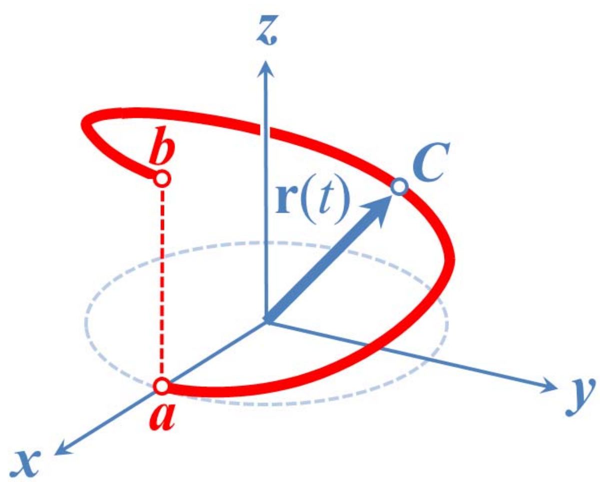

圖 1　螺旋曲線 C 的示意圖

解答：

由線積分之定義知：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot d(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) \\ = \int_C (z\mathbf{i}+x\mathbf{j}+y\mathbf{k})\cdot(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}+dz\mathbf{k}) \\ = \int_C (zdx+xdy+ydz) \tag{2}$$

已知螺旋曲線 C 可表為 $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+3t\mathbf{k}$ 、 $0\le t\le 2\pi$ ，亦即：

$$x=\cos t \text{ 、 } y=\sin t \text{ 、 } z=3t \text{ 、 } 0\le t\le 2\pi \tag{3}$$

將式(3)代入式(2)可得：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (zdx+xdy+ydz) \\ = \int_C [3td(\cos t)+\cos td(\sin t)+\sin td(3t)] \\ = \int_C [3t(-\sin t\,dt)+\cos t(\cos t\;dt)+\sin t(3dt)] \\ = \int_C [3t(-\sin t)+\cos t(\cos t)+\sin t(3)]dt \\ = \int_0^{2\pi} [-3t\sin t+\cos^2 t+3\sin t]dt \\ = \left[(-3\sin t+3t\cos t)+\left(\frac{\sin t\cos t}{2}+\frac{1}{2}t\right)-3\cos t\right]_0^{2\pi} \\ = \left[(-3\sin 2\pi+3(2\pi)\cos 2\pi)+\left(\frac{\sin 2\pi\cos 2\pi}{2}+\frac{1}{2}(2\pi)\right)-3\cos 2\pi\right] \\ -\left[(-3\sin 0+3(0)\cos 0)+\left(\frac{\sin 0\cos 0}{2}+\frac{1}{2}(0)\right)-3\cos 0\right] \\ = [(6\pi)+(\pi)-3]-[-3] \\ = 7\pi$$

亦即 $\boxed{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 7\pi}$ 。