提要 237：向量函數在平面上之線積分的方法

對很多讀者來說，向量函數之線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 實在是很難理解，作者建議由作功量去思考應會有幫助。另外，就是先探討較簡單的平面上之線積分，此為本單元之主要目標，說明如下。

向量函數在平面上之線積分

向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1(x,y)\mathbf{i} + F_2(x,y)\mathbf{j}$ 沿 xy 平面上之曲線 C 的線積分(Line Integral)是定義為：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中曲線 C 是以 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ 加以表示。

範例一

試求向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -y\mathbf{i} + xy\mathbf{j}$ 沿圖 1 所示之曲線 C 的線積分 $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ 。

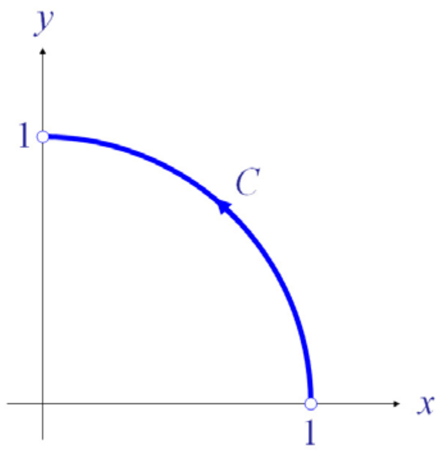

圖 1　曲線 C 的示意圖

解答：

由線積分之定義知：

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}\right)\cdot d\left(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\right)\\
&= \int_C \left(-y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}\right)\cdot\left(dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}\right)\\
&= \int_C \left(-ydx+xydy\right)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

現在需將曲線 C 以一參數 t 加以表示，這裡會需要用到之前所介紹過的曲線表示法的觀念。因圖 1 中之曲線為四分之一圓弧曲線，故可採用圓弧曲線的概念，再取第一象限的四分之一即可。基於此，該四分之一圓弧曲線可定義為：

$$
x=\cos t \text{ 、 } y=\sin t \text{ 、 } 0\le t\le \pi/2 \tag{3}
$$

將式(3)代入式(2)可得：

$$
\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_C \left(-ydx+xydy\right)\\
&= \int_C \left[-\sin t d(\cos t)+\sin t\cos t d(\sin t)\right]\\
&= \int_C \left[-\sin t(-\sin t\,dt)+\sin t\cos t(\cos t\,dt)\right]\\
&= \int_C \left(\sin^2 t+\sin t\cos^2 t\right)dt\\
&= \int_0^{\pi/2}\sin^2 t\,dt+\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^2 t\,dt\\
&= \int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,d(\cos t)\\
&= \left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t-\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi/2}\\
&= \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{1}{4}\sin\pi-\frac{\cos^3(\pi/2)}{3}\right]-\left[\frac{1}{2}(0)-\frac{1}{4}\sin 0-\frac{\cos^3 0}{3}\right]\\
&= \left[\frac{\pi}{4}-0\right]-\left[-\frac{1}{3}\right]\\
&= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

亦即 $\boxed{\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}}$。