提要 236：向量函數之線積分的意義

向量函數之線積分是由純量函數之定積分$\int_a^b f(x)dx$的觀念來的，此一積分式是表示純量函數$f(x)$沿著x座標軸由a點積分至b點。現在要將積分路徑的直線【x座標軸】改成曲線【$\mathbf{r}(t)$】，積分的函數由純量函數【$f(x)$】改成向量函數【$\mathbf{F}(\mathbf{r})$】，即積分式需改寫為$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$，其中$C$表積分曲線。

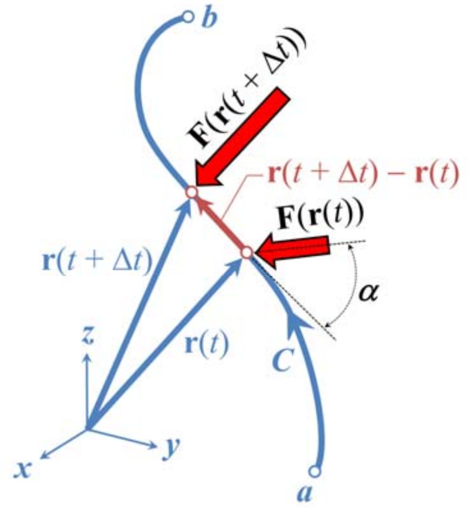
上面的說明只是符號的轉換，不過這有實際上的需要與意義，特別是在處理作功(Work)問題上時，此一調整確有其必要性，說明如下。

向量函數之線積分(Line Integral)的定義

向量函數$\mathbf{F}(\mathbf{r})$沿曲線C之線積分(Line Integral)是定義為：

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{1}$$

其中曲線C是以$\mathbf{r}(t)$表示。其物理意義如圖 1 所示，圖 1 顯示有一外力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$作用在一個物體身上，依作功量之定義知，作功量等於作用力在物體移動方向之分力乘以其移動距離，故由圖 1 知，$|\mathbf{F}|\cos\alpha|\Delta\mathbf{r}| = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$為作用力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$推動該物體移動$\Delta\mathbf{r}$所產生之功，而由$a$點移動至$b$點所產生之全部的功就是$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$。



作用力$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$之大小和方向會隨曲線$C$的位置$\mathbf{r}(t)$而改變

圖 1　作用力$\mathbf{F}(\mathbf{r})$推動圖上物體移動$\Delta\mathbf{r}$所產生的功為$|\mathbf{F}|\cos\alpha|\Delta\mathbf{r}| = \mathbf{F}\cdot\Delta\mathbf{r}$

【附註】

因為向量函數 $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ 、曲線 $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ ，所以式(1)尚有數種表示方式，說明如下：

- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,dt$
- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C (F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k})\cdot d[x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}]$
- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C F_1(t)dx(t) + F_2(t)dy(t) + F_3(t)dz(t)$
- $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C \left[F_1(t)\frac{dx(t)}{dt} + F_2(t)\frac{dy(t)}{dt} + F_3(t)\frac{dz(t)}{dt}\right]dt$

其實還有許多種其他的表示方式，在後面的單元會陸續加以介紹。