提要 231：向量函數之旋度(Curl)

令向量 **v** 代表流速場，若其旋度(Curl)存在，則代表該流場有產生旋轉(渦流)。

向量函數之旋度(Curl)的定義

向量函數之旋度(Curl)係定義為：

$$\text{curl}\ \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \quad (1)$$

其中 $\nabla = \dfrac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ 。

【附註】任何可連續兩次微分之純量函數 $f(x, y, z)$ 均滿足 $\text{curl}(\text{grad}\ f) = \mathbf{0}$ ，亦即 $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$ 。另一種說法是；「若向量函數 **v** 為純量函數 f 的梯度，則向量函數 **v** 之旋度為 **0** 向量。」

範例一

已知向量函數 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 是定義為：

$$\mathbf{v} = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

試求其旋度(Curl)。

解答：

根據定義，向量函數 $\mathbf{v}(x, y, z)$ 的旋度為：

$$\boxed{\text{curl}\ \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} = -2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}}$$