提要 228：曲面之單位垂直向量

這個概念和函數 $f(x,y,z)$ 的梯度(Gradient)運算有關，之前已略有提及，因其非常重要，故需再次強調，說明如下。

曲面之單位垂直向量(Unit Normal Vector)

曲面 $f(x,y,z)=C$ 上之單位垂直向量 $\mathbf{n}$ 可由以下關係式求出：

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

其中 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$，$\nabla$ 這個符號是唸成[dεl]。

【證明】

如圖 1 所示，∇f 表曲面 $f(x,y,z)=C$ 上之垂直向量，故長度(Norm 或 Length)為 1 之單位垂直向量 $\mathbf{n}$ 只需將此向量除以 ∇f 向量之長度即可，所以：

$$\mathbf{n}=\frac{\nabla f}{|\nabla f|}$$

故得證。

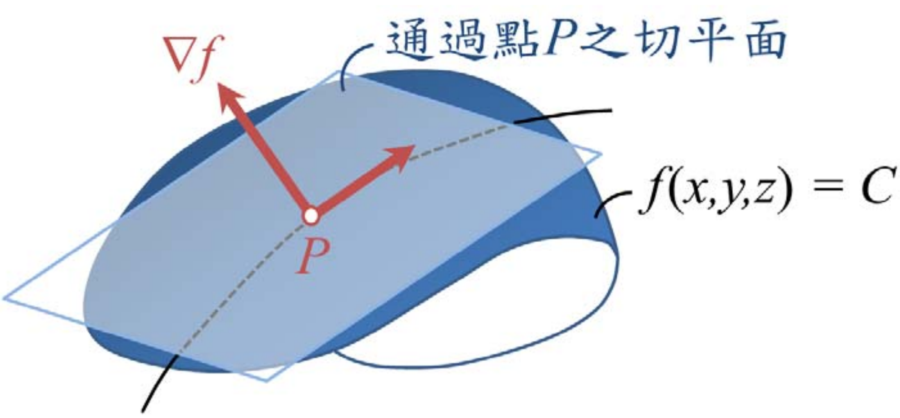

圖 1　∇f 表示曲面 $f(x,y,z)=C$ 之垂直向量

範例一

已知如圖 2 所示之三角錐曲面是定義為：

$$z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$$

試求通過點 P: (1,0,2)的單位垂直向量。

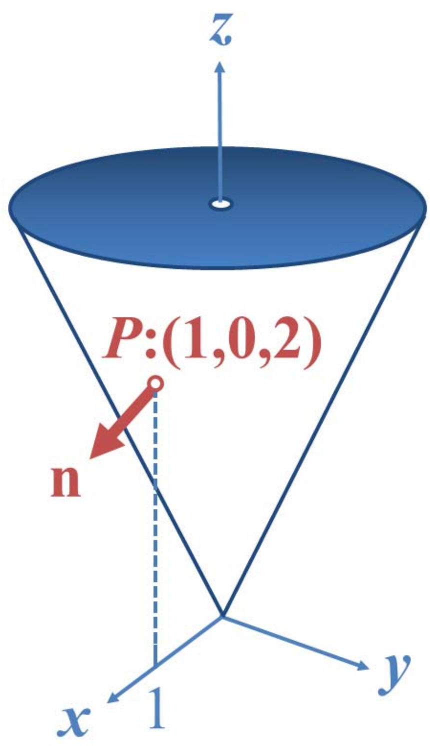

圖 2　三角錐曲面函數 $z^2 = 4\left(x^2 + y^2\right)$之幾何圖形示意圖

解答：

由之前的說明知，$\nabla f\left(P\right)$表通過點 P 並與曲面 $f\left(x, y, z\right) = C$ 互相垂直的向量，故只要將此向量除以其長度(Norm 或 Length)$\left|\nabla f\left(P\right)\right|$即可算出其單位向量$\mathbf{n}$，亦即通過點 P: (1,0,2)的單位垂直向量為$\mathbf{n} = \dfrac{\nabla f\left(P\right)}{\left|\nabla f\left(P\right)\right|}$。

由題意知，曲面函數可表為 $f\left(x, y, z\right) = 4\left(x^2 + y^2\right) - z^2 = 0$ ，故：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{\nabla f(P)}{\left|\nabla f(P)\right|} \\
&= \left.\frac{\nabla\left[4\left(x^2+y^2\right)-z^2\right]}{\left|\nabla\left[4\left(x^2+y^2\right)-z^2\right]\right|}\right|_P \\
&= \left.\frac{8x\mathbf{i}+8y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}}{\left|8x\mathbf{i}+8y\mathbf{j}-2z\mathbf{k}\right|}\right|_{(1,0,2)} \\
&= \frac{8\mathbf{i}-4\mathbf{k}}{\left|8\mathbf{i}-4\mathbf{k}\right|} \\
&= \frac{8\mathbf{i}-4\mathbf{k}}{\sqrt{(8)^2+(-4)^2}} \\
&= \frac{8\mathbf{i}-4\mathbf{k}}{\sqrt{80}} \\
&= \frac{8\mathbf{i}-4\mathbf{k}}{4\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\mathbf{i}-\mathbf{k}}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathbf{i}-\frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{k}
\end{aligned}
$$