提要 227：方向導數(Directional Derivative)之定義與意義

方向導數是用以推求曲面函數 $f(x,y,z)=C$ 在某一特定方向 $\mathbf{b}$ 之變率，說明如下。

純量函數 $f(x,y,z)$的方向導數(Directional Derivative)之定義

純量函數 $f(x,y,z)$在 $\mathbf{b}$ 方向的方向導數(Directional Derivative)是定義為：

$$D_{\mathbf{b}} f = \nabla f \cdot \mathbf{b} = \frac{df}{ds}$$

其中 $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ ，∇ 這個符號是唸成[dεl]；變數 s 是 $\mathbf{b}$ 方向之直線 $\mathbf{r}(s)$ 的弧長變數，如圖 1 所示；$\mathbf{b}$ 為單位向量。

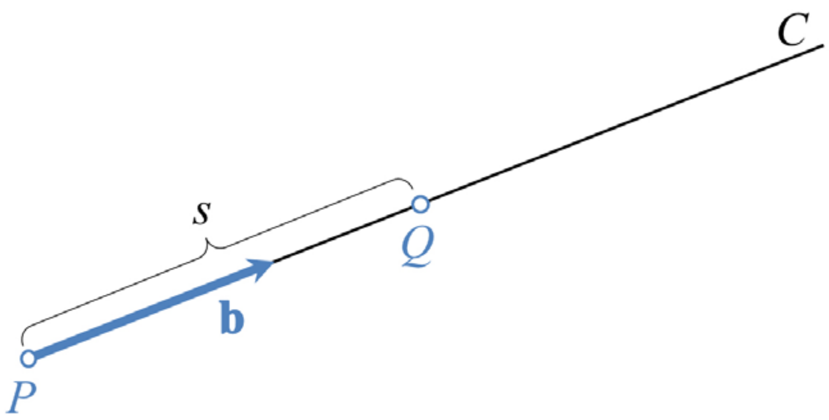

圖 1　通過曲面 $f(x,y,z)=C$ 上 P 點於 $\mathbf{b}$ 方向之方向導數

【證明】

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{b}} f &= \frac{df}{ds} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\left(\frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j} + \frac{dz}{ds}\mathbf{k}\right) \\ &= \nabla f \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} \end{aligned} \tag{1}$$

另外，如圖 1 所示之直線，其向量表示法為：

$$\mathbf{r}(s)=x(s)\mathbf{i}+y(s)\mathbf{j}+z(s)\mathbf{k}=\mathbf{p}_0+s\mathbf{b} \tag{2}$$

其中$\mathbf{p}_0$為P點之位置向量，此為一常數。將式(2)代入式(1)，則：

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{b}}f &= \nabla f\cdot\frac{d\mathbf{r}}{ds} \\ &= \nabla f\cdot\frac{d(\mathbf{p}_0+s\mathbf{b})}{ds} \\ &= \nabla f\cdot\mathbf{b} \end{aligned} \tag{3}$$

故得證。

【附註】瞭解方向導數之意義在於：有助於計算出空間中某一場量$f(x,y,z)$在某一特定方向$\mathbf{b}$之變化率。

範例一
已知純量函數 $f(x,y,z)$是定義為： $$f(x,y,z)=2x^2+3y^2+z^2$$ 試求函數 $f(x,y,z)$在點 P: (2,1,3)於方向 $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ 之方向導數。

解答：

根據定義，函數 $f(x,y,z)$在點 P: (2,1,3)於方向 $\mathbf{a}=\mathbf{i}-2\mathbf{k}$ 之方向導數可表為：

$$\begin{aligned}
D_{\mathbf{b}} f &= \nabla f \cdot \mathbf{b} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)\cdot\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \\
&= (4x\mathbf{i}+6y\mathbf{j}+2z\mathbf{k})\cdot\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{k}}{|\mathbf{i}-2\mathbf{k}|}
\end{aligned}$$

再將 P 點之座標代入上式中，故：

$$\boxed{\begin{aligned}
D_{\mathbf{b}} f &= (8\mathbf{i}+6\mathbf{j}+6\mathbf{k})\cdot\frac{\mathbf{i}-2\mathbf{k}}{|\mathbf{i}-2\mathbf{k}|} \\
&= \frac{8-12}{\sqrt{(1)^2+(-2)^2}} \\
&= \frac{-4}{\sqrt{5}} \\
&= -\frac{4}{5}\sqrt{5}
\end{aligned}}$$