

## 提要 226：純量函數之梯度(Gradient)

大自然的許多現象都與梯度(Gradient)有關，例如水會由高水位往低水位方向移動，熱量會由高溫區向低溫區流動，說明如下。

### 純量函數 $f(x,y,z)$ 的梯度(Gradient)運算

純量函數  $f(x,y,z)$  的梯度(Gradient)運算是定義為：

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

其中  $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}$ ， $\nabla$  這個符號是唸成 [del]。

**【附註】**  $\nabla f$  有兩件重要之幾何意義要讓讀者知道：❶  $\nabla f$  表示曲面  $f(x, y, z) = C$  之垂直向量，如圖 1 所示；❷  $\nabla f(P)$  表在  $P$  點增量最大的方向。通常這兩件事是以定理的方式出現，其重要性可見一般！

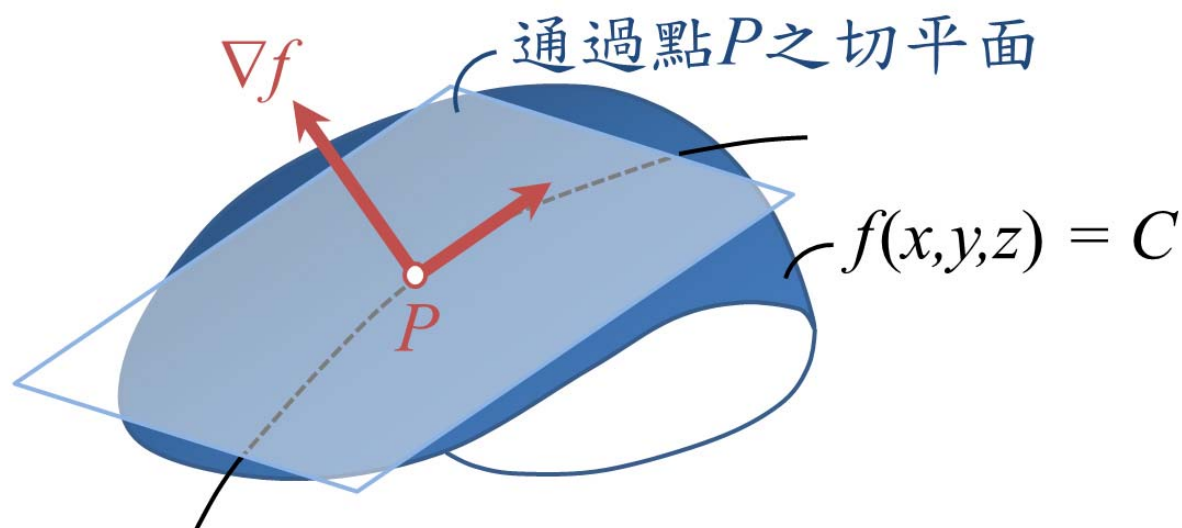


圖 1  $\nabla f$  表示曲面  $f(x, y, z) = C$  之垂直向量

### 範例一

已知純量函數  $f(x,y,z)$  是定義為：

$$f = x^2 + y^2 + z^2$$

試求其梯度(Gradient)。

解答：

根據定義，純量函數  $f(x,y,z)$  的梯度為：

$$\text{grad } f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

## 範例二

已知如圖 2 所示之三角錐曲面是定義為：

$$z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

試求通過點  $P: (1,0,2)$  的單位垂直向量。

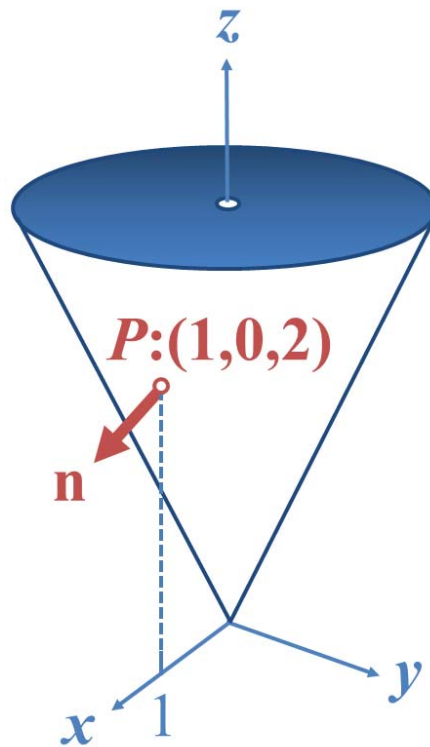


圖 2 三角錐曲面函數  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$  之幾何圖形示意圖

解答：

由之前的說明知， $\nabla f(P)$  表通過點  $P$  並與曲面  $f(x, y, z) = C$  互相垂直的向量，故只要將此向量除以其長度 (Norm 或 Length)  $|\nabla f(P)|$ ，即可算出其單位向量  $\mathbf{n}$ ，亦即通過點

$P: (1,0,2)$  的單位垂直向量為  $\mathbf{n} = \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|}$ 。

由題意知，曲面函數可表為  $f(x, y, z) = 4(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ ，故：

$$\begin{aligned}\mathbf{n} &= \frac{\nabla f(P)}{|\nabla f(P)|} \\ &= \frac{\nabla [4(x^2 + y^2) - z^2]}{|\nabla [4(x^2 + y^2) - z^2]|_P} \\ &= \frac{8x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}}{|8x\mathbf{i} + 8y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}|_{(1,0,2)}} \\ &= \frac{8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}}{|8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}|} \\ &= \frac{8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}}{\sqrt{(8)^2 + (-4)^2}} \\ &= \frac{8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}}{\sqrt{80}} \\ &= \frac{8\mathbf{i} - 4\mathbf{k}}{4\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{k}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\mathbf{i} - \frac{\sqrt{5}}{5}\mathbf{k}\end{aligned}$$