提要 225：切線加速度與垂直加速度

對曲線 $\mathbf{r}(t)$ 而言，加速度(Acceleration)有可區分為切線加速度(Tangential Acceleration)及垂直加速度(Normal Acceleration)，說明如下。

切線加速度(Tangential Acceleration)與垂直加速度(Normal Acceleration)
■ 切線加速度係定義為：$\mathbf{u}(s)\dfrac{d^2s}{dt^2}$ ■ 垂直加速度係定義為：$\dfrac{d\mathbf{u}(s)}{ds}\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2$ 其中 $\mathbf{u}(s)=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$；$\mathbf{r}(s)$ 係以弧長 s 為變數之位移曲線。

證明：

加速度 $\mathbf{a}(t)$ 是由速度 $\mathbf{v}(t)$ 之變化率的觀念來的，故：

$$\mathbf{a}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{v}(t+\Delta t)-\mathbf{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} \tag{1}$$

另外，速度 $\mathbf{v}(t)$ 是位移 $\mathbf{r}(t)$ 之變化率的概念來的，亦即：

$$\mathbf{v}(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}=\frac{d\mathbf{r}(t)}{ds}\frac{ds}{dt}=\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt} \tag{2}$$

其中 $\mathbf{u}(s)=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$，$s$ 為弧長變數。將式(2)代入式(1)，則式(1)可表為：

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(t)&=\frac{d\mathbf{v}(t)}{dt}\\
&=\frac{d}{dt}\left[\mathbf{u}(s)\frac{ds}{dt}\right]\\
&=\frac{d\mathbf{u}(s)}{dt}\frac{ds}{dt}+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}\\
&=\left[\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds}\frac{ds}{dt}\right]\frac{ds}{dt}+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}\\
&=\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+\mathbf{u}(s)\frac{d^2s}{dt^2}
\end{aligned} \tag{3}$$

其中$\mathbf{u}(s)\dfrac{d^2s}{dt^2}$的方向即為$\mathbf{u}(s)$的方向，而$\mathbf{u}(s)=\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}$，故$\mathbf{u}(s)$的方向即為$d\mathbf{r}$的方向，又$d\mathbf{r}$的方向就是如圖 1 所示$\lim\limits_{\Delta t\to 0}[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]$的方向，所以我們可以下一個結論說：

*** $\mathbf{u}(s)\dfrac{d^2s}{dt^2}$的方向即為$\mathbf{r}(t)$的切線方向 ***

$\mathbf{u}(s)\dfrac{d^2s}{dt^2}$係與加速度有關，故將此一加速度稱為切線加速度(Tangential Acceleration)。

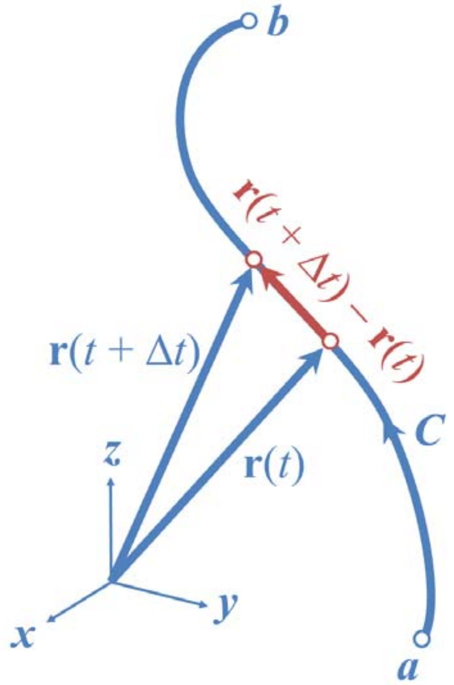

圖 1　以時間 t 為變數的曲線$\mathbf{r}(t)$及$\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$的方向示意圖

另外，$\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ 的方向即為 $\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds}$ 的方向，而 $\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\mathbf{u}(s+\Delta s)-\mathbf{u}(s)}{\Delta s}$，如圖 2 所示，$\mathbf{u}(s+\Delta s)-\mathbf{u}(s)$ 的方向為曲線 $\mathbf{u}(s)$ 的垂直方向，因 $\frac{d\mathbf{u}(s)}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$ 與加速度有關，故將此加速度稱為垂直加速度(Normal Acceleration)。

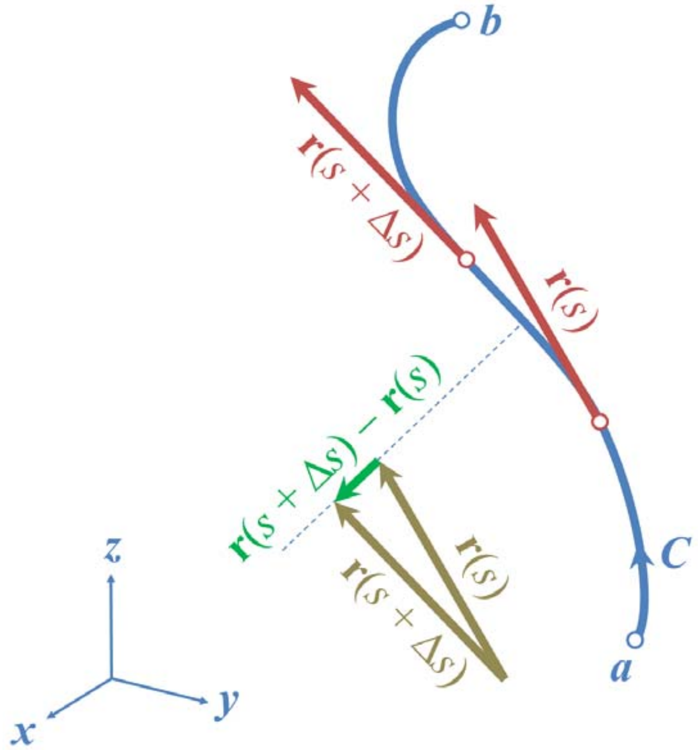

圖 2　以弧長 s 為變數的曲線 $\mathbf{r}(s)$ 及 $\mathbf{r}(s+\Delta s)-\mathbf{r}(s)$ 的方向示意圖