提要 223：曲線之長度

可利用位置向量之微小變化量推求曲線的長度，說明如下。

曲線的長度

如圖 1 所示曲線 $\mathbf{r}(t)$ 上 a 點至 b 點、或 a 點至任意位置所形成的曲線長度 l 或 $s(t)$ 為：

$$\boxed{l=\int_a^b\sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}dt \text{ 、 } \mathbf{r}'=\frac{d\mathbf{r}}{dt}} \quad \text{或} \quad \boxed{s(t)=\int_a^t\sqrt{\mathbf{r}'\cdot\mathbf{r}'}dt}$$

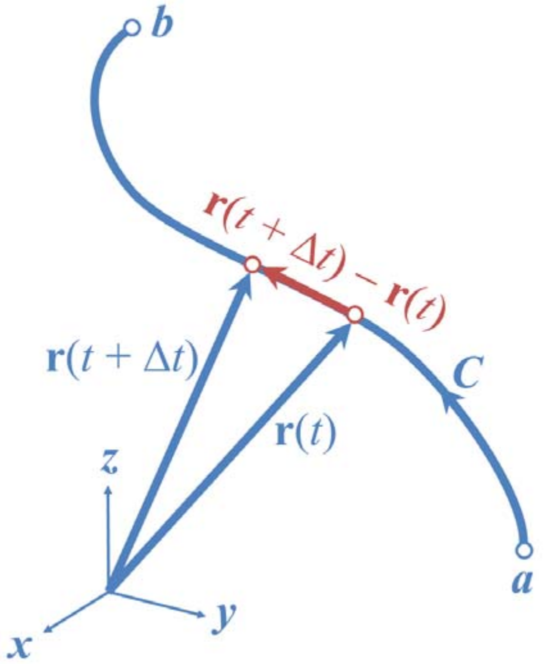

圖 1　曲線 $\mathbf{r}(t)$ 示意圖

證明：

由圖 1 知，$\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$ 係表示沿曲線走向之方向向量，因此取絕對值求其長度時，$|\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)|$ 即代表該小段曲線之長度，且 Δt 愈小愈接近該小段曲線之長度。根據向量之 Norm 的定義，$|\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)|$ 亦可表為 $\sqrt{[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]\cdot[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]}$，此式係表示曲線上之一小段弧長 Δl，故：

$$\Delta l=\sqrt{[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]\cdot[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)]} \tag{1}$$

上式可繼續改寫為：

$$\Delta l=\sqrt{\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}\cdot\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}}(\Delta t) \tag{2}$$

當 $\Delta t\to 0$ 時，上式又可表為：

$$dl=\sqrt{\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}}(dt) \tag{3}$$

若欲計算由 a 點至 b 點的曲線長度 l，則僅需作 a 點至 b 點的積分即可：

$$l=\int_a^b\sqrt{\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}}dt \tag{4}$$

若欲計算由 a 點至任意位置所形成的曲線長度 $s(t)$，則僅需作 a 點至任意位置 t 的積分即可：

$$s(t)=\int_a^t\sqrt{\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}}dt \tag{5}$$

故得證。

範例一

試以弧長 s 為變數改寫螺旋曲線 $\mathbf{r}(t)=a\cos t\mathbf{i}+a\sin t\mathbf{j}+ct\mathbf{k}$ 中之 t 變數。

解答：

由式(5)知，曲線之弧長 s 可表為：

$$\begin{aligned}
s(t) &= \int_0^t \sqrt{\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\cdot\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{(-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k})\cdot(-a\sin t\mathbf{i}+a\cos t\mathbf{j}+c\mathbf{k})}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+(c)^2}\,dt \\
&= \int_0^t \sqrt{a^2+c^2}\,dt \\
&= \sqrt{a^2+c^2}\,t
\end{aligned}$$

故參數 t 可據以改寫為弧長 s，即：

$$t=\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}$$

因此原螺旋曲線可改寫為：

$$\boxed{\mathbf{r}(s)=a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{i}+a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{j}+\frac{cs}{\sqrt{a^2+c^2}}\mathbf{k}}$$