提要 222：通過曲線上特定點 P 之切線

本單元需利用直線之向量表示法推求切線，說明如下。

切線之表示法

通過曲線 $\mathbf{r}(t)$ 上 P 點所形成的切線 $\mathbf{q}(\omega)$ 之方程式如下：

$$\boxed{\mathbf{q}(\omega)=\mathbf{r}(P)+\omega\,\mathbf{r}'(P)}$$

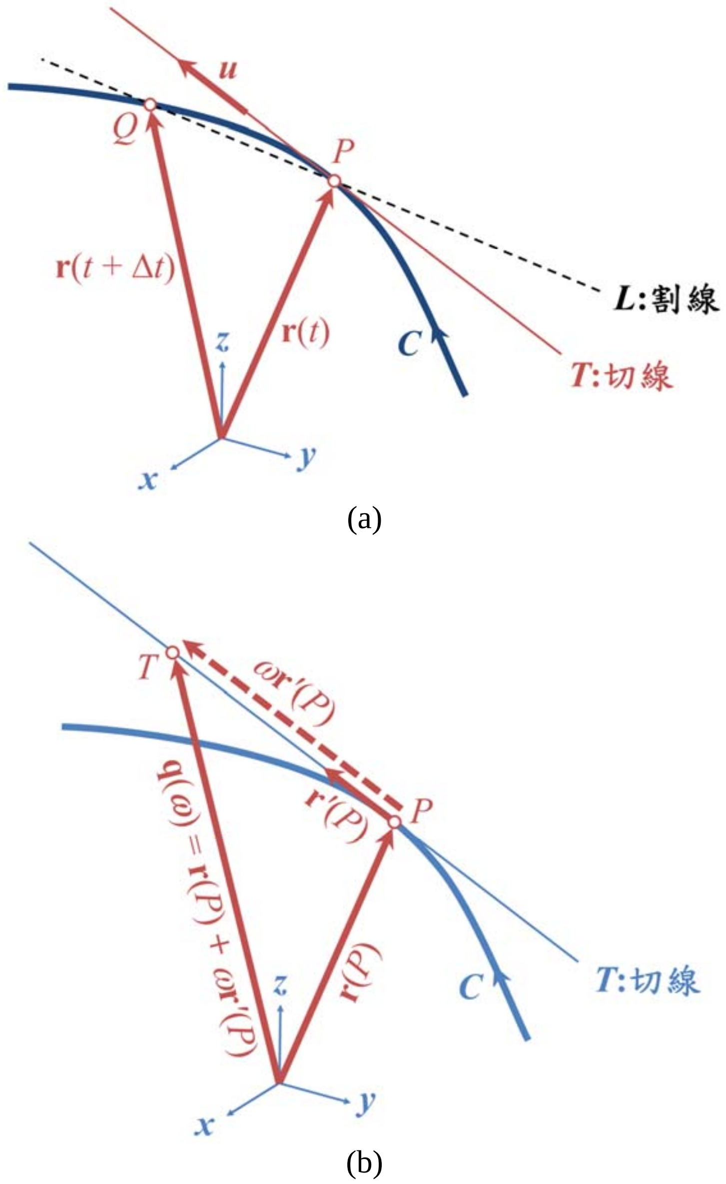

圖 1　通過曲線 $\mathbf{r}(t)$ 上點 P 所形成的切線 $\mathbf{q}(\omega)$ 示意圖

證明：

已知如圖 2 所示任意曲線均可以 $\mathbf{r}(t)$ 表示：

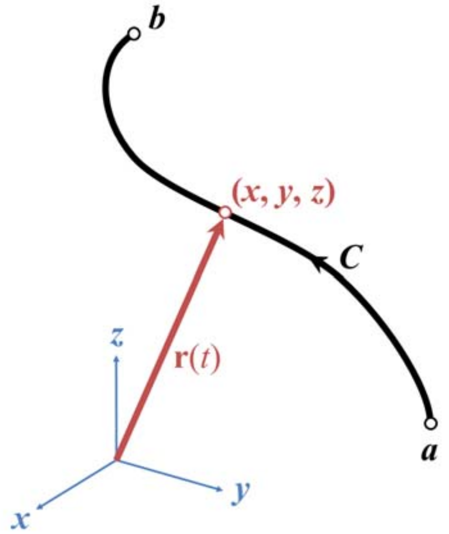

圖 2　任意曲線均可表為 $\mathbf{r}(t)$

另外，如圖 3 所示直線應表為 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$：

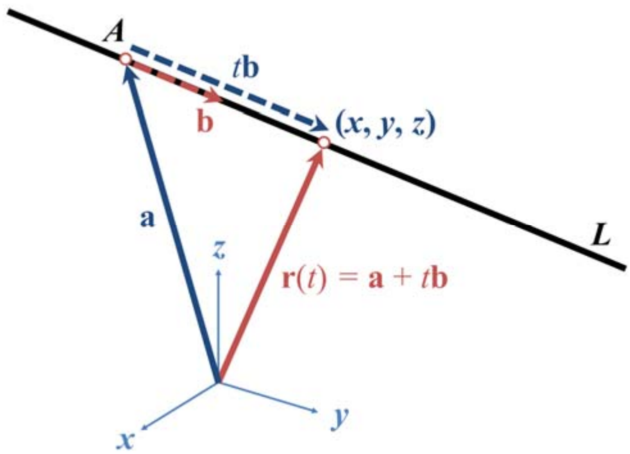

圖 3　方程式 $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ 表一直線

由圖 1 知，切線之符號為 $\mathbf{q}$，且該向量函數之參數為 ω，因為另有一曲線 $\mathbf{r}$ 是以符號 t 為參數，為區分曲線與切線，故其自變數係以不同符號加以表示。基於此，類似圖 3 之直線方程式應修改為：

$$\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{a} + \omega\,\mathbf{b} \tag{1}$$

其中 $\mathbf{a}$ 為線上之一已知點所組成的位置向量，$\mathbf{b}$ 為直線之方向向量。茲將式(1)視為切線，

則需想辦法計算出切線上之 **a** 與 **b**。**a** 與 **b** 均需由曲線 **r** 提供，解釋如下：

a 之推算

向量 **a** 必須是切線 $\mathbf{q}(\omega)$上之一已知點所構成的位置向量，因為切線通過 P 點，且 P 點亦為曲線 $\mathbf{r}(t)$上之一點，又該點應為題目所給之已知點，故：

$$\mathbf{a} = \mathbf{r}(P) \tag{2}$$

b 之推算

方向向量 **b** 必須是切線 $\mathbf{q}(\omega)$之方向向量，此方向向量也可由曲線 $\mathbf{r}(t)$求出。由圖 1 知，P 點之位置向量為 $\mathbf{r}(t)$，Q 點之位置向量為 $\mathbf{r}(t+\Delta t)$，讓 Q 點之位置向量減去 P 點之位置向量，即 $\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)$，再讓 Q 點慢慢接近 P 點，則所形成的方向正是切線 $\mathbf{q}(\omega)$之方向，也就是說，方向向量 **b** 可表為：

$$\mathbf{b} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\mathbf{r}(Q)-\mathbf{r}(P)\right] \quad \text{或} \quad \mathbf{b} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)\right] \tag{3}$$

上式若除以純量Δt，則仍能保持原來的方向，亦即方向向量 **b** 亦可表為：

$$\mathbf{b} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(Q)-\mathbf{r}(P)}{\Delta t} \quad \text{或} \quad \mathbf{b} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

根據微分函數之定義，上式亦可簡寫為：

$$\mathbf{b} = \mathbf{r}'(P) \quad \text{或} \quad \mathbf{b} = \mathbf{r}'(t) \tag{5}$$

將式(2)與式(5)代入式(1)，故切線方程式可改寫為：

$$\boxed{\mathbf{q}(\omega) = \mathbf{r}(P) + \omega\mathbf{r}'(P)} \tag{6}$$

故得證。

【後記】雖然記公式也不難，不過既然已是學術殿堂的一份子，是不是也應該多瞭解公式的由來呢？瞭解問題的本質，也是一項樂趣呢！

範例一
試求通過橢圓曲線 $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$ 上 P 點 $\left(\sqrt{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 的切線方程式。

解答：

首先以向量表示法改寫橢圓曲線，因是曲線，故僅需一個自變數 t 即可表示該曲線。令：

$$x=2\cos t \text{ 、 } y=\sin t \text{ 、 } z=0 \tag{7}$$

故橢圓曲線之向量表示法為：

$$\mathbf{r}(t)=2\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j} \tag{8}$$

當 $t=\pi/4$ 時，恰好對應到 P 點。式(8)之微分式為：

$$\mathbf{r}'(t)=-2\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j} \tag{9}$$

由式(6)知，問題之切線方程式為：

$$\mathbf{q}(\omega)=\mathbf{r}(P)+\omega\mathbf{r}'(P) \tag{6}$$

其中

$$\mathbf{r}(P)=\mathbf{r}(\pi/4)=2\mathbf{i}\cos\pi/4+\mathbf{j}\sin\pi/4=\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{2}/2\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}'(P)=\mathbf{r}'(\pi/4)=-2\mathbf{i}\sin\pi/4+\mathbf{j}\cos\pi/4=-\sqrt{2}\mathbf{i}+\sqrt{2}/2\,\mathbf{j}$$

故問題之切線方程式為：

$$\boxed{\mathbf{q}(\omega)=\sqrt{2}(1-\omega)\mathbf{i}+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+\omega)\mathbf{j}}$$