

## 提要 221：四種特殊曲面之定義

「圓柱面」、「圓球面」及兩種「圓錐面」是最常被當成考題的曲面，故讀者需特別留意其純量暨向量表示法，說明如下。

### 圓柱面之表示法

圓柱面之表示法至少有兩種，說明如下：

1. **純量表示法**： $x^2 + y^2 = a^2$ 、 $-h \leq z \leq h$ 。
2. **向量表示法**： $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \mathbf{i} + a \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$ 、 $0 \leq u < 2\pi$ 、 $-h \leq v \leq h$ 。

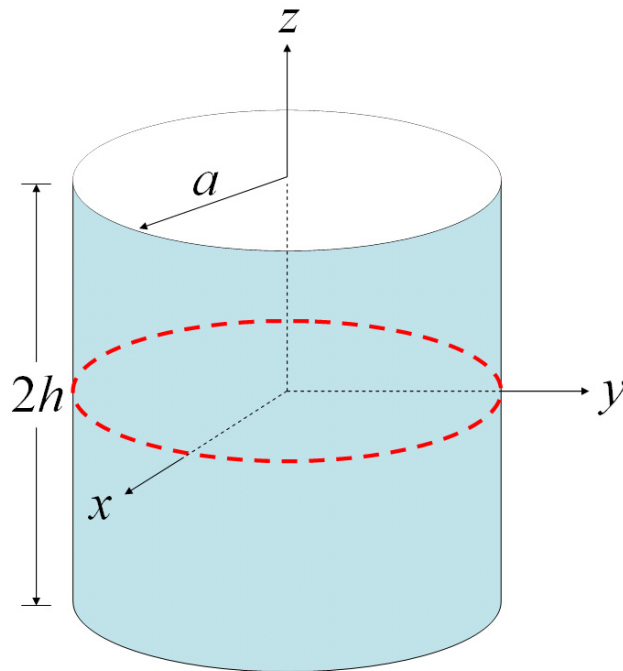


圖 1 表示圓柱面至少有兩種方法：(a)  $x^2 + y^2 = a^2$ 、 $-h \leq z \leq h$ 。

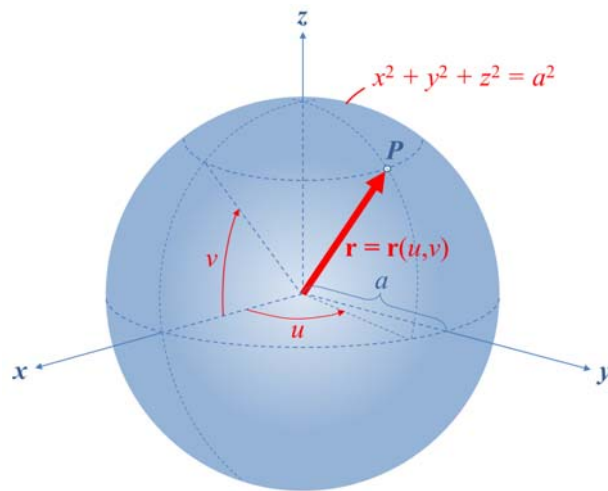
(b)  $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \mathbf{i} + a \sin u \mathbf{j} + v \mathbf{k}$ 、 $0 \leq u < 2\pi$ 、 $-h \leq v \leq h$ 。

## 圓球面之表示法

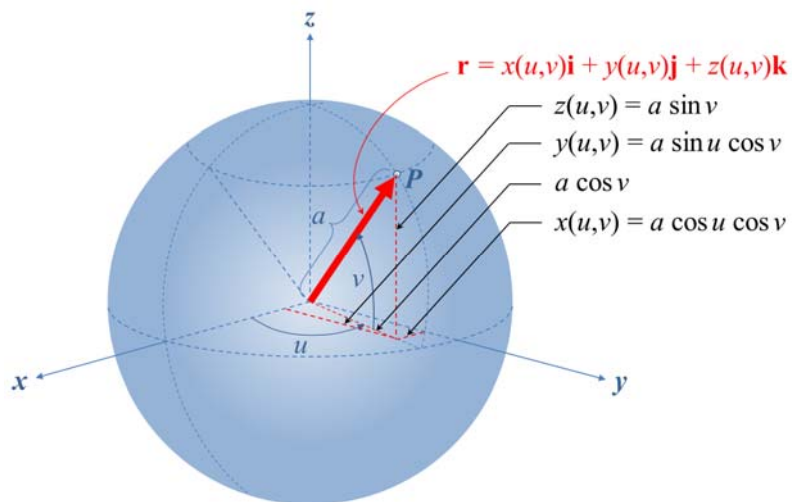
圓球面之表示法至少有兩種，說明如下：

1. **純量表示法**： $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 。
2. **向量表示法**： $\mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$ ，

$$\text{其中 } 0 \leq u < 2\pi \text{、} -\frac{\pi}{2} \leq v < \frac{\pi}{2} \text{。}$$



(a)



(b)

圖 2 表示半徑為  $a$  的圓球面至少有兩種方法： $(a) x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 。

$(b) \mathbf{r}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{i} + a \sin u \cos v \mathbf{j} + a \sin v \mathbf{k}$ ，其中  $0 \leq u < 2\pi$ 、 $-\frac{\pi}{2} \leq v < \frac{\pi}{2}$ 。

### 圓錐面之表示法(一)

圓錐面之表示法亦至少有兩種，說明如下：

1. **純量表示法**： $z = 1 - (x^2 + y^2)$ 、 $z \geq 0$ 。
2. **向量表示法**： $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + [1 - (u^2 + v^2)]\mathbf{k}$ ，其中  $u^2 + v^2 \leq 1$ 。

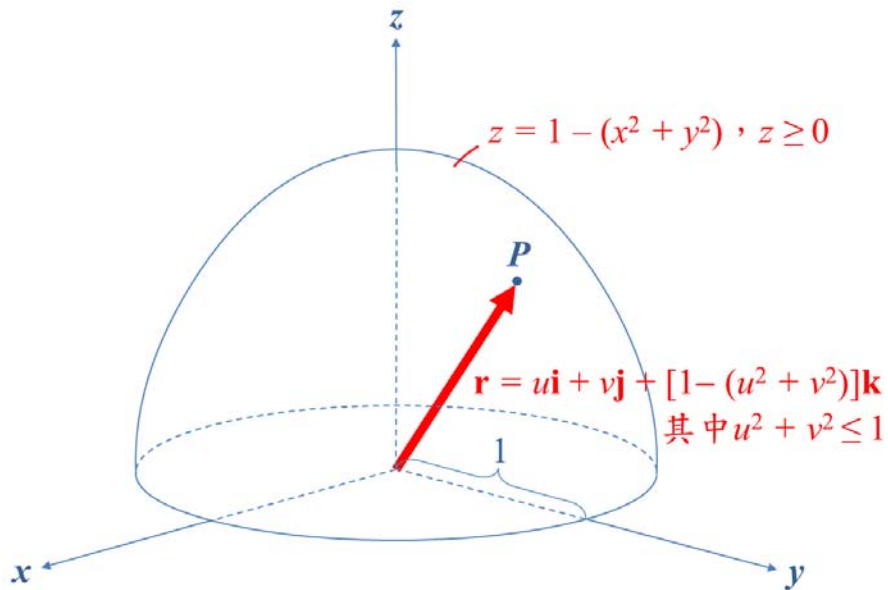


圖 3 表示圓錐面至少有兩種方法：  
(a)  $z = 1 - (x^2 + y^2)$ ， $z \geq 0$ 。  
(b)  $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + [1 - (u^2 + v^2)]\mathbf{k}$ ，其中  $u^2 + v^2 \leq 1$ 。

## 圓錐面之表示法(二)

第二種圓錐面為倒立之圓錐面，其表示法亦至少有兩種，說明如下：

1. **純量表示法**： $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ 。
2. **向量表示法**： $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$ ，其中  $u \geq 0$ 、 $0 \leq v < 2\pi$ 。

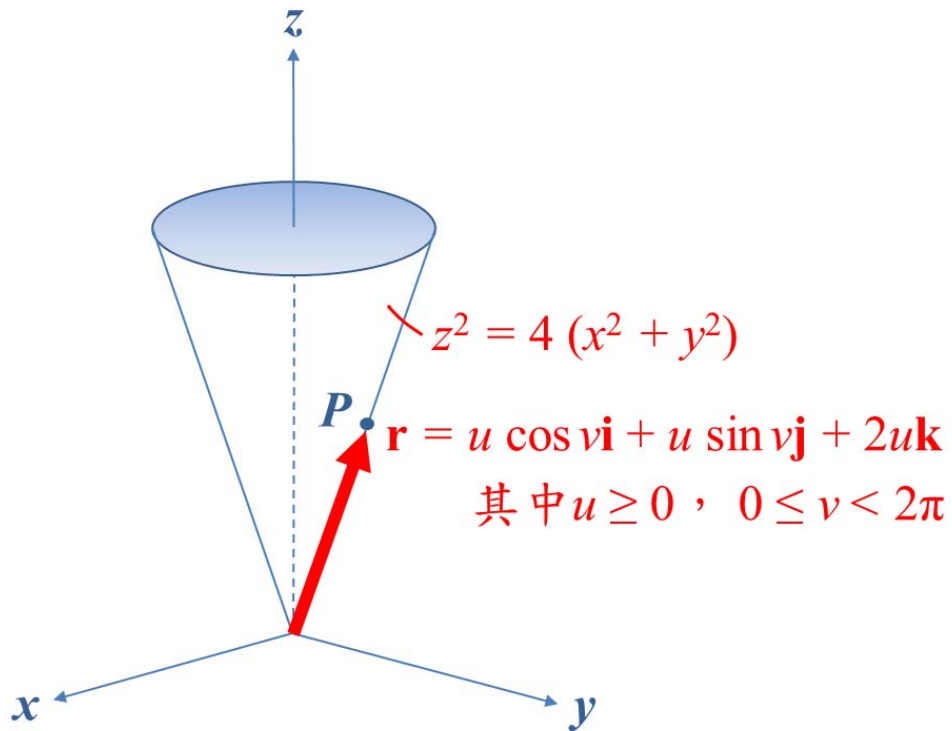


圖 4 表示倒立圓錐面至少有兩種方法：(a)  $z^2 = 4(x^2 + y^2)$ 。  
(b)  $\mathbf{r}(u, v) = u \cos v \mathbf{i} + u \sin v \mathbf{j} + 2u \mathbf{k}$ ，其中  $u \geq 0$ 、 $0 \leq v < 2\pi$ 。