提要 220：三度空間中之區域表示法

只要知道三度空間中之曲面表示法，再加上大於或小於的觀念，即可定義出空間中某一有興趣的區域。同理，其表示法至少有兩種，一是純量表示法，另一是向量表示法，說明如下。

三度空間中之區域表示法

三度空間中之區域表示法至少有兩種，說明如下：

1. 利用高度變化表示一曲面(純量表示法)：已知曲面可表為 $f(x,y,z)=c$，故 $f(x,y,z)\le c$ 即表示以曲面為邊界之內部點所構成的區域。例如 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 表示球面及其內部之點所組成的區域。

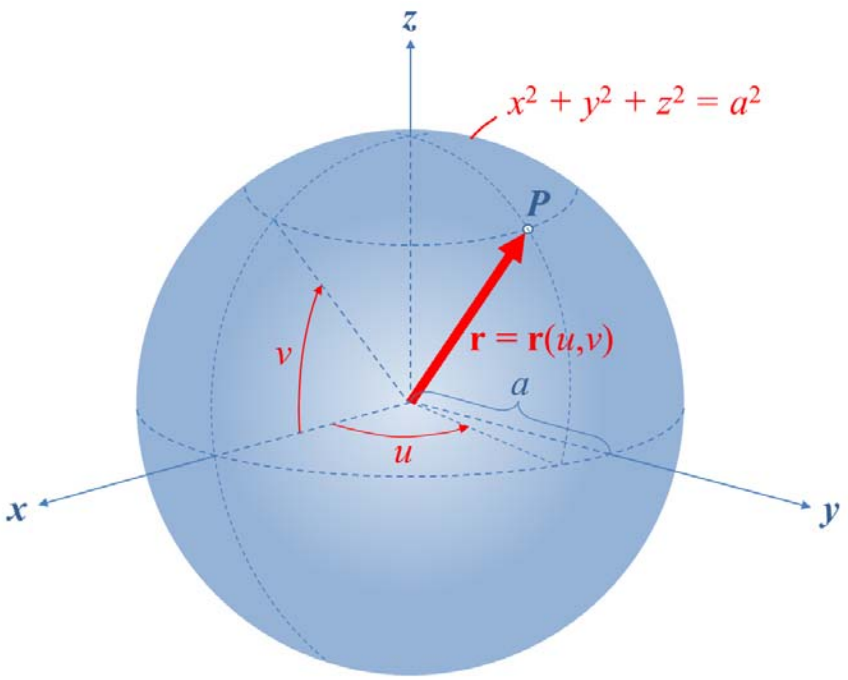

圖 1　$x^2+y^2+z^2\le a^2$ 表示球面及其內部之點所組成的區域

2. $\boxed{\text{利用參數式表示一曲面(向量表示法)}}$：曲面上之任意點$(x,y,z)$所構成的位置向量 $\mathbf{r}$ 可由參數 u、v 之調整得知，即 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$，其中參數 u、v 表曲線之座標變數。因此，區域之向量表示法與 $\boxed{\mathbf{r}\le\mathbf{r}(u,v)}$ 有關。若以圖 2 為例，因圓球曲面之位置向量的三個分量可分別表為 $x(u,v)=a\cos u\cos v$、$y(u,v)=a\sin u\cos v$、$z(u,v)=a\sin v$，故球面及其內部之點所組成的區域可表為：

$$\mathbf{r}(u,v)\le a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k}\text{ 、 }0\le u<2\pi\text{ 、 }-\frac{\pi}{2}\le v<\frac{\pi}{2}$$

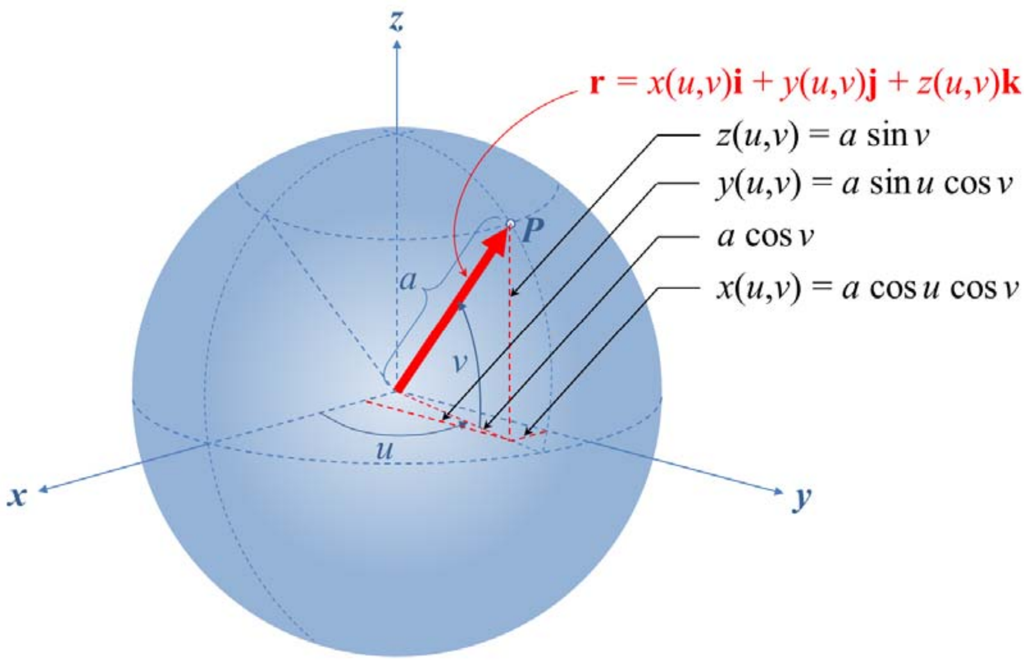

圖 2　$\mathbf{r}(u,v)\le a\cos u\cos v\mathbf{i}+a\sin u\cos v\mathbf{j}+a\sin v\mathbf{k}$ 、 $0\le u<2\pi$ 、 $-\frac{\pi}{2}\le v<\frac{\pi}{2}$

表示球面及其內部之點所組成的區域

範例一

試說明如圖 2 所示圓筒內部之點 $x^2+y^2<a^2$ 、 $-1\le z\le 1$ 的向量表示法。

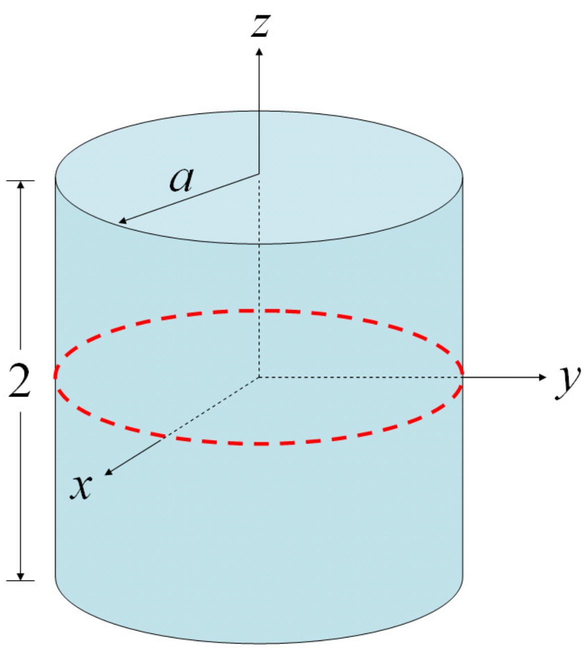

圖 2　$x^2+y^2<a^2$ 、 $-1\le z\le 1$ 所示圓筒內部之點示意圖

解答：

令 $x=a\cos u$ 、 $y=a\sin u$ 、 $z=v$ ，由曲面方程式知，曲面上之任意點 (x,y,z) 所構成的位置向量 $\mathbf{r}$ 為：

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=a\cos u\mathbf{i}+a\sin u\mathbf{j}+v\mathbf{k}$$

其中 $0\le u<2\pi$ 、 $-1\le v\le 1$ 。故圓筒曲面內部之點所組成的區域之表示法為：

$$\boxed{\mathbf{r}<a\cos u\mathbf{i}+a\sin u\mathbf{j}+v\mathbf{k} \text{ 、 } 0\le u<2\pi \text{ 、 } -1\le v\le 1}$$