提要 218：三度空間中之平面表示法

三度空間中之平面表示法至少有兩種，一是純量表示法，另一是向量表示法，說明如下。

三度空間中之平面表示法

三度空間中之平面表示法至少有兩種，說明如下：

1. 利用兩向量之內積表示一平面(純量表示法)：如圖 1 所示，平面上任意點之位置向量 $\mathbf{r}=[x,y,z]$ 在垂直法線向量 $\mathbf{a}=[a_1,a_2,a_3]$ 上的投影量為定值，故 $\boxed{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=c}$ 表一平面，此平面方程式亦可表為 $\boxed{a_1x+a_2y+a_3z=c}$。

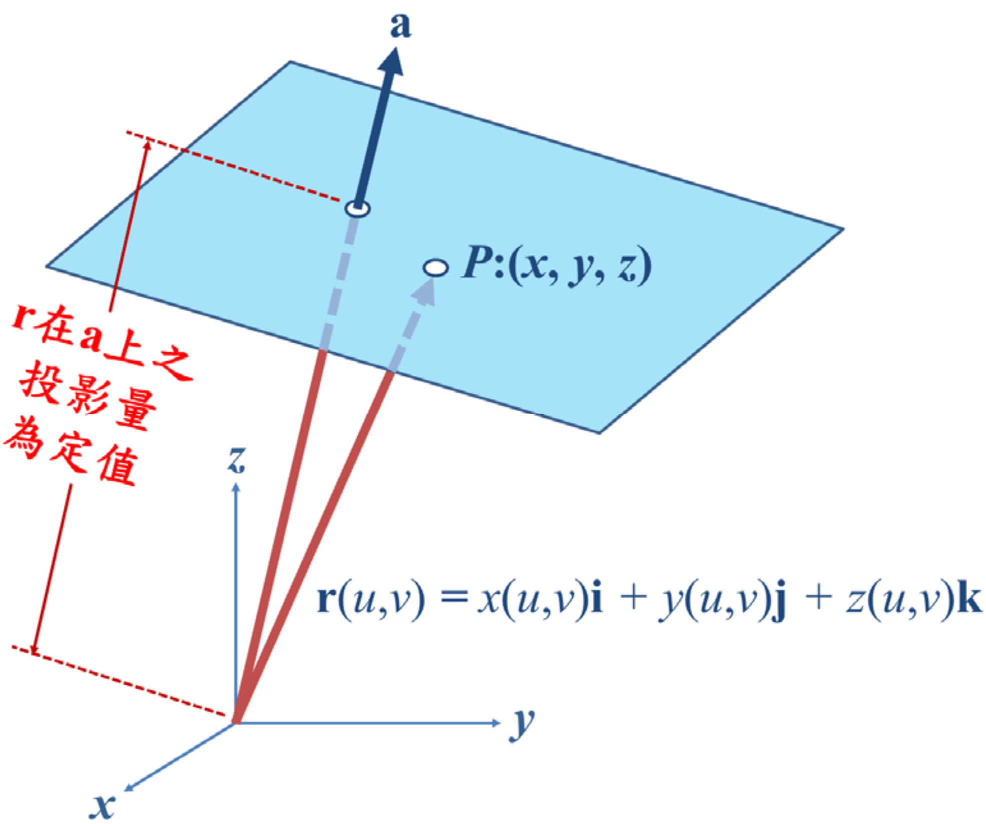

圖 1　平面上任意點之位置向量 $\mathbf{r}=[x,y,z]$ 在垂直法線向量 $\mathbf{a}$ 上的投影量為定值

2. 利用參數式表示一平面(向量表示法)：曲線需要一個參數 t 才能將曲線表明出來，曲面則需要兩個參數 u、v 才能將曲面表明出來，平面是曲面的一種，故平面亦然。如圖 2 所示，平面上之任意點(x, y, z)所構成的位置向量 $\mathbf{r}$ 可由參數 u、v 之調整得知，即 $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}(u,v)}$，其中參數 u、v 表曲線之座標變數。

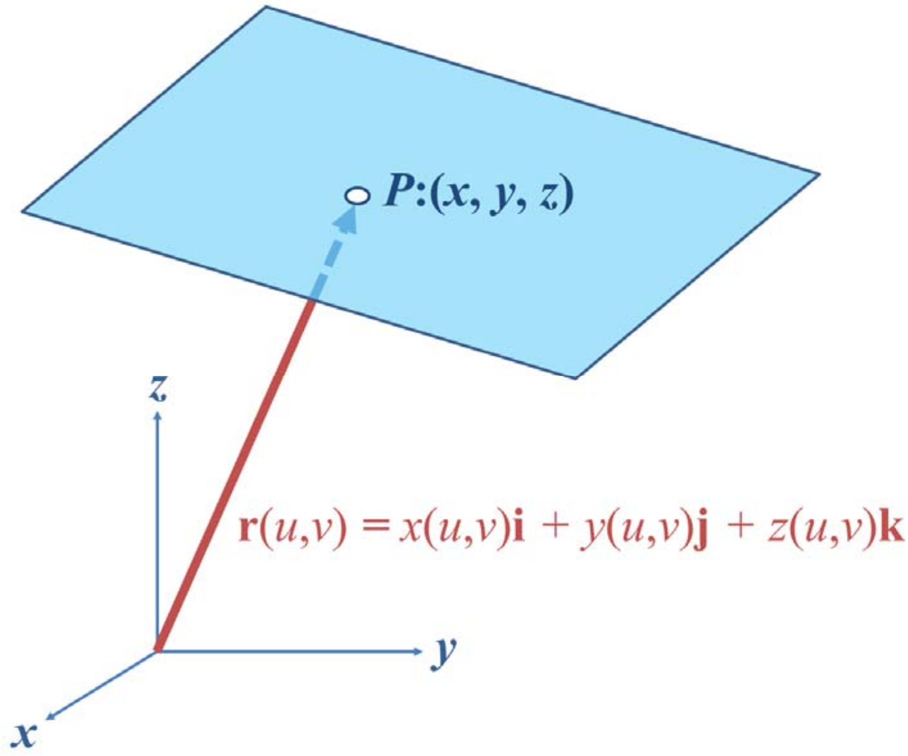

圖 2　以 $\mathbf{r}(u,v)$表示平面之示意圖

範例一
試說明平面方程式 $4x+y-z=7$ 之向量表示法。

解答：

令 $u=x$ 、 $v=y$ ，由平面方程式知 $z=4x+y-7=4u+v-7$ ，故平面上之任意點 (x,y,z) 所構成的位置向量 $\mathbf{r}$ 為：

$$\boxed{\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}=u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+(4u+v-7)\mathbf{k}}$$

利用以上位置向量 $\mathbf{r}$ 即可描繪出整個平面，此即為該平面之向量表示法。

註：只要兩個參數即可表示曲面或平面之位置向量，即 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)$。