

提要 217：三度空間中之曲線表示法

三度空間中之直線表示法至少有兩種，一是利用兩曲面之交集表示一曲線，另一是引用一個參數 t 建立參數式加以表示，說明如下。

三度空間中之曲線表示法

三度空間中之曲線表示法至少有兩種，說明如下：

1. **利用兩曲面之交集表示一曲線(純量表示法)**：若兩曲面 $\begin{cases} f(x, y, z) = c \\ g(x, y, z) = d \end{cases}$ 非平行，則其交集即呈一曲線，如圖 1 所示。

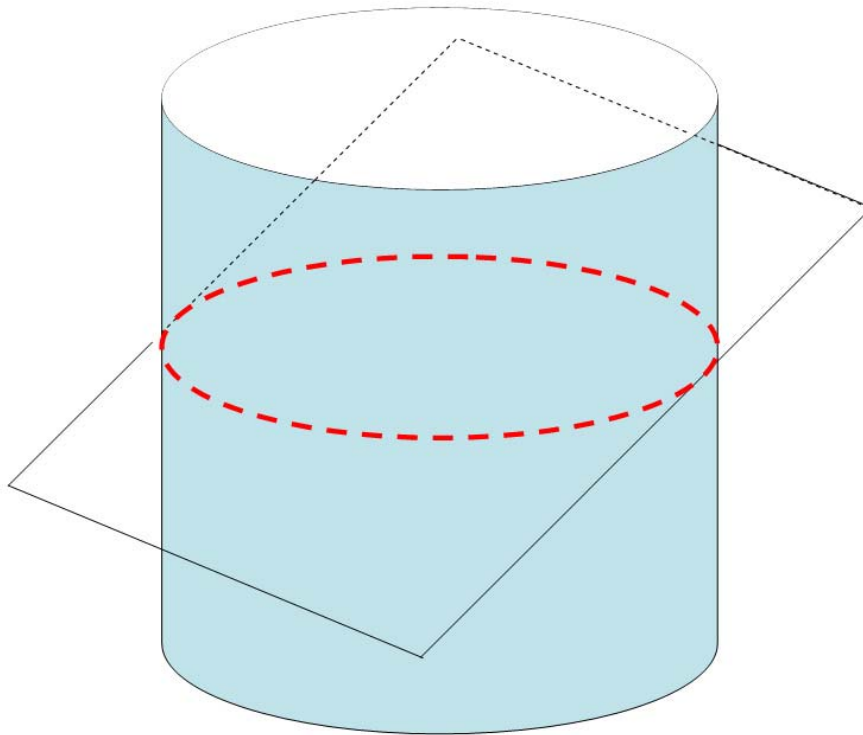


圖 1 利用圓柱曲面和平面之交集即可形成一個圓的曲線

2. **利用參數式表示一曲線(向量表示法)**：如圖 2 所示，曲線上之任意點 (x, y, z) 所構成的位置向量 \mathbf{r} 可由參數 t 之調整得知，即 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ，通常參數 t 表角度之變化量或弧長之變化量。

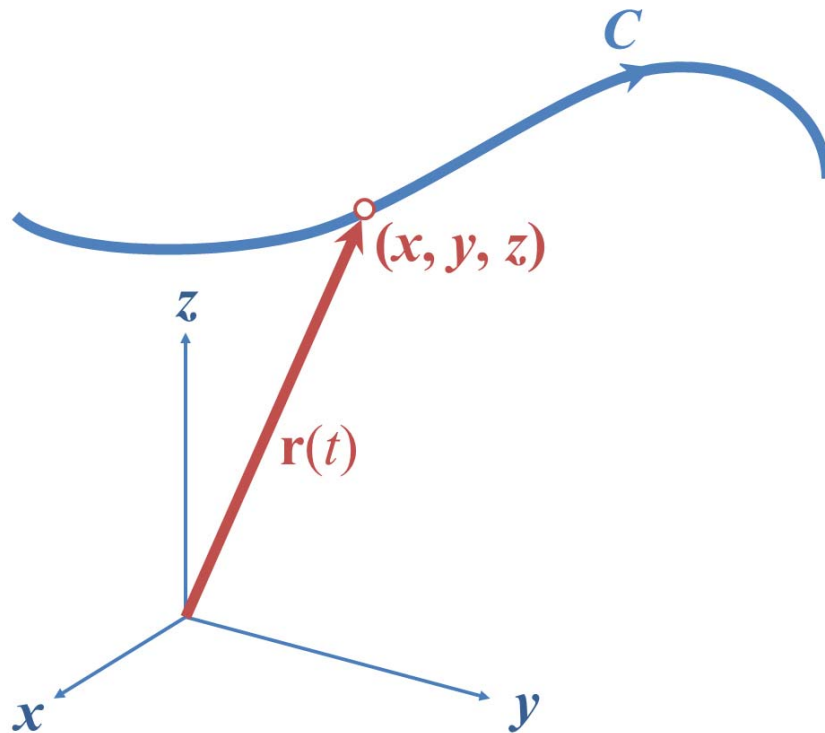


圖 2 $\mathbf{r}(t)$ 表曲線之示意圖

附註：由之前有關直線之表示法 $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}$ 的討論，亦可用以揣摩得知僅需一個參數 t 即可表示一條曲線。

範例一

試說明位於 xy 平面之橢圓曲線方程式的純量表示法及向量表示法。

解答：

① 純量表示法

可利用兩個曲面之交集表示橢圓曲線，例如 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 即表示位於 xy 平面之橢圓曲線。

② 向量表示法

令位於 xy 平面之橢圓曲線上任意位置 (x, y, z) 之位置向量 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 的三個分量分別為 $x = a \cos t$ 、 $y = b \sin t$ ， $z = 0$ ，故 $\mathbf{r}(t) = a \cos t \mathbf{i} + b \sin t \mathbf{j}$ 即表示該橢圓曲線。