提要 216：三度空間中之直線表示法

三度空間中之直線表示法至少有兩種，一是利用兩平面之交集表示一直線，另一是引用一個參數 t 建立參數式加以表示，說明如下。

三度空間中之直線表示法

三度空間中之直線表示法至少有兩種，說明如下：

1. $\boxed{\text{利用兩平面之交集表示一直線(純量表示法)}}$：若兩平面 $\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z=c \\ b_1x+b_2y+b_3z=d \end{cases}$ 非平行，則其交集即為一直線，如圖 1 所示。

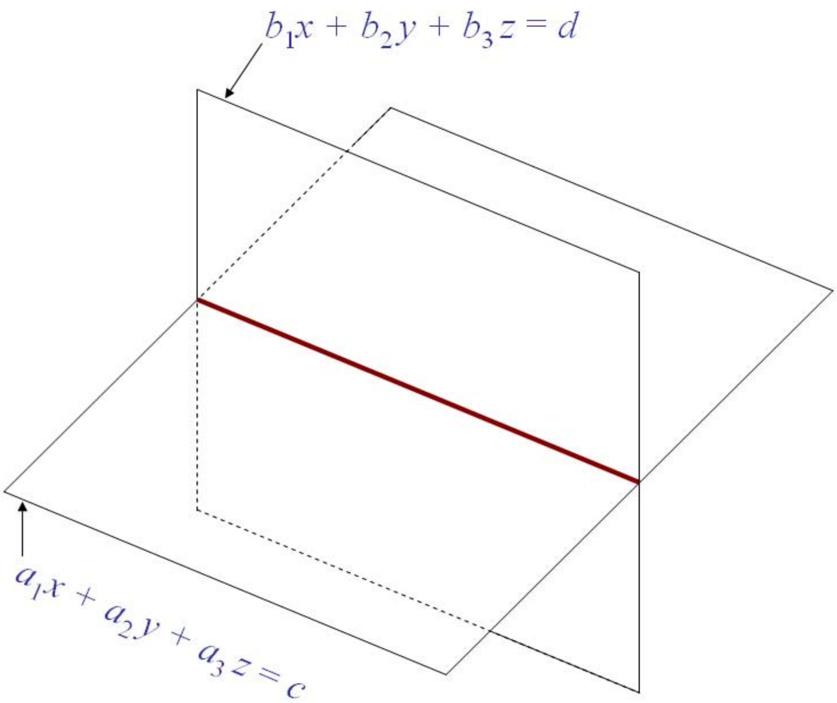

圖 1　利用兩平面之交集可形成一條直線

2. 利用參數式表示一直線(向量表示法)：如圖 2 所示，直線 L 上之任意點 (x, y, z) 所構成的位置向量 **r** 為向量 **a** 與向量 t**b** 之和，即 $\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}}$，其中點 A 為線上之一已知點，故向量 **a** 為已知；直線之方向向量 **b** 亦為已知，參數 t 可作任意倍數之調整，所以能構成一直線。

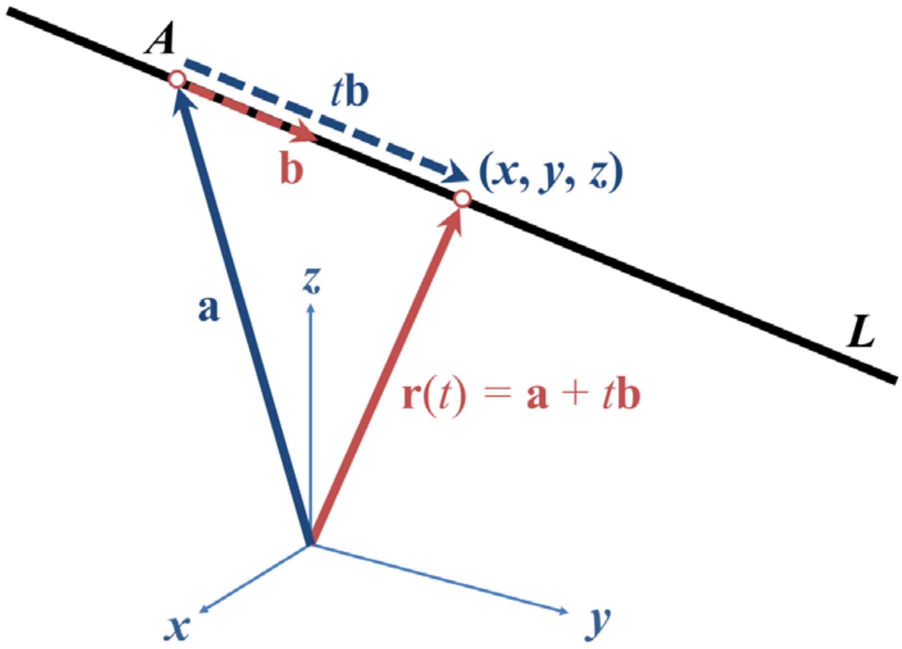

圖 2　**r** = **a** + t**b** 表直線之示意圖

附註：$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{b}}$ 亦可以分量加以表示，因為 $\mathbf{r} = (x, y, z)$、$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$、$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$、所以 $\boxed{x = a_1 + tb_1、y = a_2 + tb_2、z = a_3 + tb_3}$，或 $\boxed{\dfrac{x-a_1}{b_1} = \dfrac{y-a_2}{b_2} = \dfrac{z-a_3}{b_3}}$。

範例一
已知直線 L 通過點 $A:(3,2,0)$，直線之方向向量 $\mathbf{b}=[1,1,1]$，試求此直線方程式。

解答：

直線 L 可以位置向量 $\mathbf{r}=\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ 加以表示，其中向量 $\mathbf{a}$ 表線上之一已知點 A 所構成的位置向量，$\mathbf{b}$ 表直線 L 之方向向量。已知線上之一已知點的座標為 $(3,2,0)$，故 $\mathbf{a}=[3,2,0]$，又 $\mathbf{b}$ 為已知，所以直線 L 可表為：

$$\boxed{\mathbf{r}=[3,2,0]+t[1,1,1]=[3+t,2+t,t]}$$

或

$$\boxed{\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \\ z=t \end{cases}}$$

或

$$\boxed{x-3=y-2=z}$$

附註：因為 $\mathbf{b}$ 表直線 L 之方向向量，故通常將其長度予以單位化，亦即令直線 L 之方向向量為 $\dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}=\dfrac{[1,1,1]}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$。基於此，直線 L 亦可改寫為

$$\boxed{\mathbf{r}=[3,2,0]+t\left[\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right]=\left[3+\frac{t}{\sqrt{3}},2+\frac{t}{\sqrt{3}},\frac{t}{\sqrt{3}}\right]}$$。