提要 214：純量三重積(Scalar Triple Product)之其他性質

三個向量的純量三重積(Scalar Triple Product) $(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})$，亦可稱之為 Mixed Triple Product，其基本定義為 $(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$，本單元則擬繼續說明其他相關之性質。

純量三重積(Scalar Triple Product)之其他性質

純量三重積尚有許多其他重要性質，補充說明如下：

1. 雖然 $(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，但是即使是將其表為 $(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 也是可以的。因為若欲先作 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ 內積之運算，則所得之純量將無法再與向量 $\mathbf{c}$ 作外積之運算。故一定要更正為先進行外積 $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ 之運算，所得出之向量再與 $\mathbf{a}$ 向量進行內積之運算，方才合理。

2. 如圖 1 所示，$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 之純量三重積的長度(Norm 或 Length)可表為：$|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=|\mathbf{a}||\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cos\beta$。

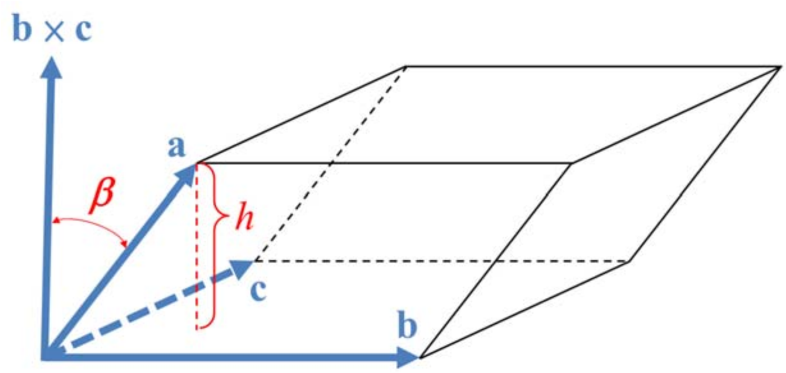

圖 1　$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 三個向量之純量三重積是代表平行六面體的體積

3. 圖 1 中之高度 h 可以平行六面體的體積 $(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})$ 除以 $\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 向量所構成的面積 $|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ 推求出，亦即 $h=\dfrac{(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})}{|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|}$。

4. $(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})=(\mathbf{b}\quad\mathbf{c}\quad\mathbf{a})=(\mathbf{c}\quad\mathbf{a}\quad\mathbf{b})$

5. $(k\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})=k(\mathbf{a}\quad\mathbf{b}\quad\mathbf{c})$

6. 若三個向量互為線性獨立(Linear Independence)，則此三個向量所構成的純量三重積不等於零。

7. 若使 $c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2+\cdots+c_n\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ 恆成立的惟一條件是 $c_1=c_2=\cdots=c_n=0$，則 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$、…、$\mathbf{a}_n$ 互為線性獨立，反之亦然。