

## 提要 213：純量三重積(Scalar Triple Product)之定義及其應用

三個向量的純量三重積(Scalar Triple Product)亦可稱之為 Mixed Triple Product，其定義說明如下。

### 純量三重積(Scalar Triple Product)之定義

若  $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ 、 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ 、 $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3]$ ，則這三個向量之純量三重積是定義為：

$$(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

純量三重積是代表如圖 1 所示平行六面體的體積：

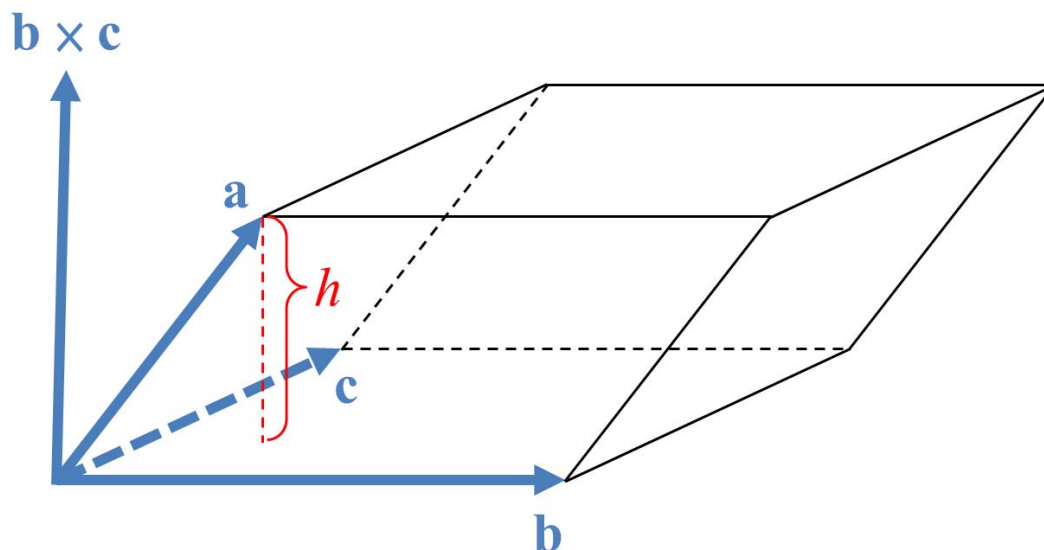


圖 1  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  三個向量之純量三重積是代表平行六面體的體積

註：圖 1 中之高度  $h$  可以平行六面體的體積  $(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})$  除以  $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  向量所構成的面積

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \text{ 推求出，亦即 } h = \frac{(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|}。$$

### 範例一

已知向量  $\mathbf{a} = [2, 0, 3]$ 、 $\mathbf{b} = [0, 6, 2]$ 、 $\mathbf{c} = [3, 3, 0]$ ，試求這三個向量所構成如圖 2 所示之三角錐體的體積。

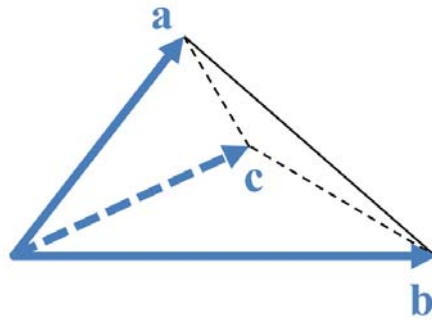


圖 2 三個向量所構成之三角錐體

解答：

由定義知  $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$  三個向量之純量三重積是代表如圖 1 所示平行六面體的體積，而如圖 2 所示三角錐體的體積之大小，為平行六面體體積的六分之一，故題意所欲推求之體積計算如下：

$$\frac{1}{6}(\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}(-54 - 12) = -11$$

體積大小為正的量，故上面所計算出之體積解應修正為 11 個體積單位。