

提要 211：向量外積(Vector Product 或 Cross Product)之定義

兩向量之內積為純量，但兩向量的外積仍為向量，其定義如下。

向量之外積(Vector Product 或 Cross Product)

若 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ 、 $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3]$ ，則這兩個向量之外積是定義為：

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

其大小為 $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\gamma$ ， γ 為 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 向量間之夾角， $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$ ； $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ ；

$|\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$ ；兩向量之外積的方向可根據右手定則(Right-Handed Rule)決定其方向，如圖 1 所示。

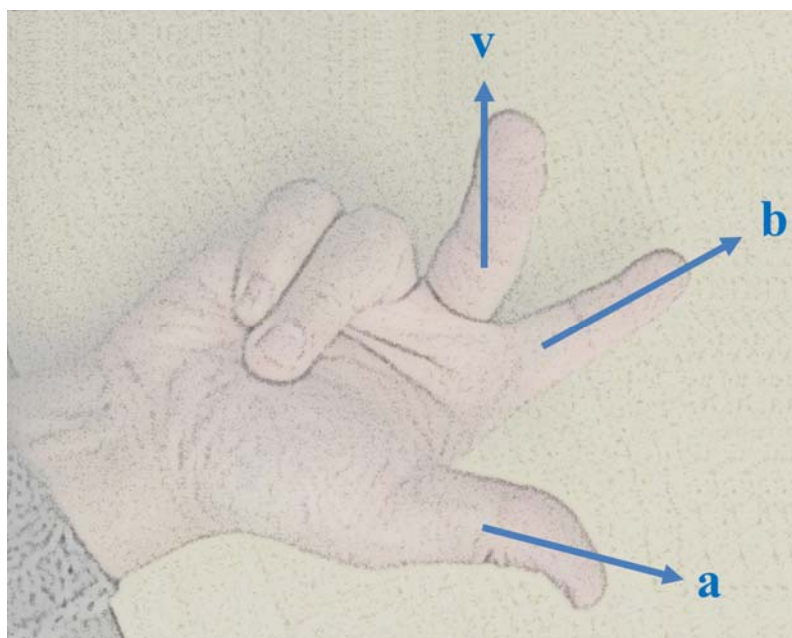


圖 1 根據右手定則可推求兩向量之外積的方向

範例一

已知向量 $\mathbf{a} = [4, 0, -1]$ 、 $\mathbf{b} = [-2, 1, 3]$ ，試求這兩個向量之外積。

解答：

由定義知，兩向量 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 之外積為：

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = (0+1)\mathbf{i} + (2-12)\mathbf{j} + (4-0)\mathbf{k} = \mathbf{i} - 10\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$