提要 210：利用向量之內積推求與另一條直線垂直的直線

平面上兩條相互垂直的直線之推求方法

平面上的直線在三度空間中，其實就是另外一個平面。故平面上兩條相互垂直的直線，可考慮為兩個相互垂直的平面。而平面的純量表示法 $a_1x + a_2y + a_3z = c$ 中之係數所構成的向量 $[a_1, a_2, a_3]$，即相當於垂直於該平面之向量。

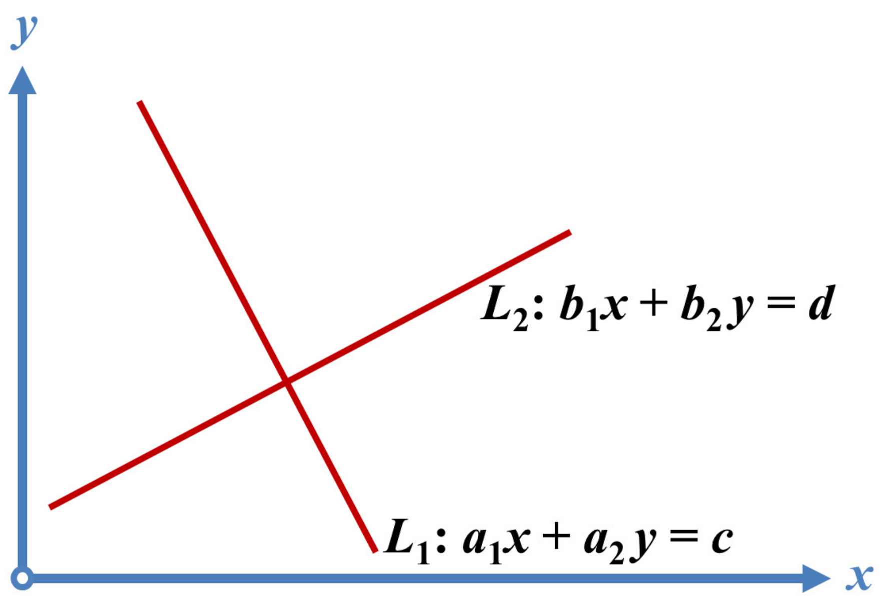

圖 1　平面上兩條相互垂直的直線其實也可視為兩個相互垂直的平面

如圖 1 所示之兩垂直線，可視為與 xy 平面相互垂直之另外兩個平面，因此這兩個平面之法線向量分別為 $[a_1, a_2, 0]$ 與 $[b_1, b_2, 0]$。由於這兩個平面互相垂直，所以其法線向量亦呈相互垂直狀態，故 $[a_1, a_2, 0] \cdot [b_1, b_2, 0] = 0$，亦即 $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$。

試推求平面上通過點 $P:(1,3)$ 並與直線 $L_2: x-2y+2=0$ 相互垂直的直線 L_1，如圖 2 所示。

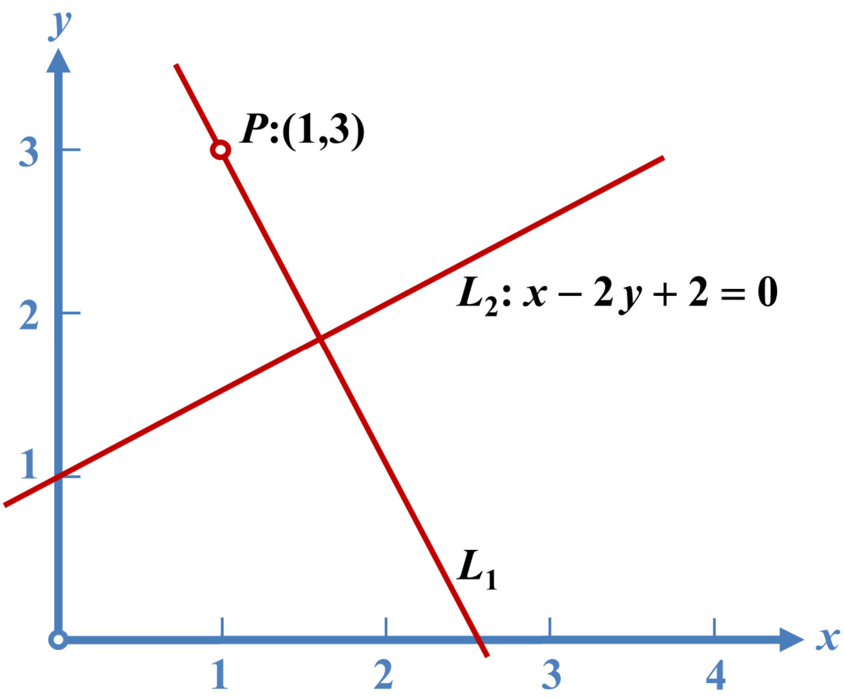

圖 2　平面上兩條相互垂直的直線

解答：

已知直線 $L_2: x-2y+2=0$，其法線向量為 $[1,-2,0]$。設與其相互垂直的 L_1 之直線方程式為 $a_1x+a_2y=c$，則直線 L_1 之法線向量為 $[a_1,a_2,0]$。因為兩直線互相垂直，故其法線向量亦呈相互垂直狀態。由正交性定理知，兩個相互垂直的向量之內積為零，故：

$$[1,-2,0]\cdot[a_1,a_2,0]=0$$

上式可化簡為：

$$a_1-2a_2=0 \tag{1}$$

由題意知，直線 L_1 亦通過點 $P:(1,3)$，故可將 P 點座標代入 L_1 之直線方程式，亦即：

$$a_1+3a_2=c \tag{2}$$

解析式(1)與式(2)可得知：

$$a_1 = \frac{2c}{5} \text{、} a_2 = \frac{c}{5}$$

故直線方程式 L_1 可表為：

$$\boxed{\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}y = 1}$$