

提要 209：利用向量之內積推求平面上之單位法線向量

平面方程式

如圖 1 所示，平面方程式可思考為：平面上任意點 (x, y, z) 所構成的位置向量 $\mathbf{r} = [x, y, z]$ ，投影在平面之垂直法線向量 $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]$ 上的投影量為定值，亦即 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = c$ 或 $a_1x + a_2y + a_3z = c$ 表一平面。

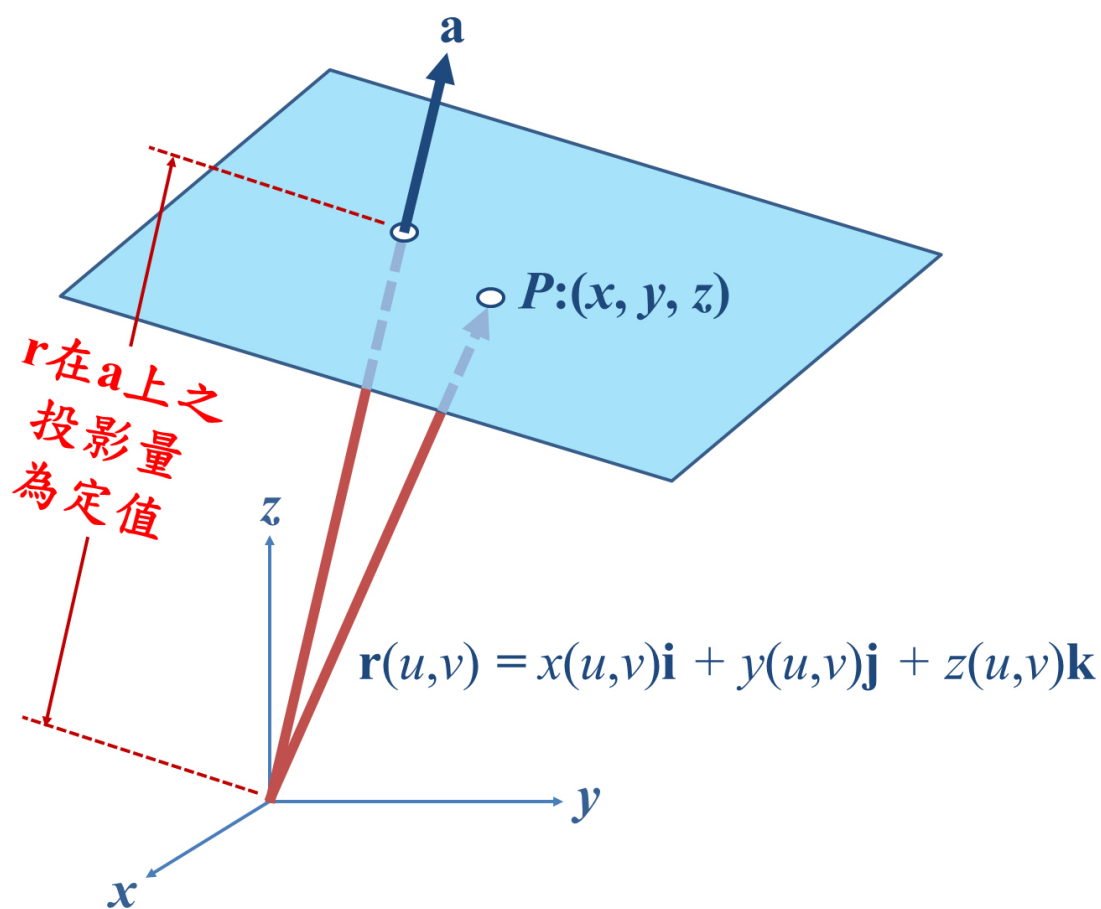


圖 1 位置向量 $\mathbf{r} = [x, y, z]$ 投影在平面之垂直法線向量 \mathbf{n} 上的投影量為定值

範例一

試推求垂直於平面 $3x + 4y + 5z = 7$ 之單位法線向量 \mathbf{n} 。

解答：

由本單元關於平面方程式之說明知，平面方程式 $3x + 4y + 5z = 7$ 中之係數即為垂直於平面之向量 $\mathbf{a} = [3, 4, 5]$ ，故其單位法線向量 \mathbf{n} 為：

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{[3, 4, 5]}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{[3, 4, 5]}{\sqrt{50}} = \frac{[3, 4, 5]}{5\sqrt{2}} = \left[\frac{3\sqrt{2}}{10}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$