提要 207：向量之正交性(Orthogonality)定理

正交性(Orthogonality)定理

若 $\mathbf{a}=[a_1,a_2,a_3]$、$\mathbf{b}=[b_1,b_2,b_3]$均為非零之向量，且$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$，則稱這兩個向量互相垂直。

附註：

1. 可以利用向量之內積計算向量之長度(Norm 或 Length)：向量 $\mathbf{a}$ 之長度 $\boxed{|\mathbf{a}|=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}}$。

2. 可以利用向量之內積計算向量之夾角(Angle)：向量 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 之夾角 $\boxed{\gamma=\cos^{-1}\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}}$。

範例一
已知 $\mathbf{a}=[3,5,-1]$、$\mathbf{b}=[2,-7,-8]$，試求這兩個向量之內積及其夾角。

解答：

由定義知，$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 兩向量之內積為：

$$\boxed{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(3)(2)+(5)(-7)+(-1)(-8)=-21}$$

又因為 $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\gamma$，所以 $\gamma=\cos^{-1}\dfrac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$，故 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 兩向量之夾角 γ 為：

$$\begin{aligned}\gamma&=\cos^{-1}\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\\&=\cos^{-1}\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}\\&=\cos^{-1}\frac{(3)(2)+(5)(-7)+(-1)(-8)}{\sqrt{(3)^2+(5)^2+(-1)^2}\sqrt{(2)^2+(-7)^2+(-8)^2}}\\&=\cos^{-1}\frac{-21}{\sqrt{35}\sqrt{117}}\\&=109.157^\circ\end{aligned}$$