提要 200：以 Cramer's Rule 解析聯立線性代數方程式

Cramer's Rule(克蘭默法則)是解析聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 之解的方法之一，然而因其必須面對繁複之反矩陣的運算，故若是係數矩陣的大小超過 3×3，則引用此法解題較不容易。以下說明 Cramer's Rule，並以範例說明其應用方式。

Cramer's Rule(克蘭默法則)
利用 Cramer's Rule 解析線性之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 時，其公式為： $$x_j=\frac{\lvert\boldsymbol{A}_j\rvert}{\lvert\boldsymbol{A}\rvert}=\frac{\det\boldsymbol{A}_j}{\det\boldsymbol{A}}$$ 其中 $\det\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ $$\det\boldsymbol{A}_j=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

範例一

試以 Cramer’s Rule 解析以下所示之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解：

$$(a)\begin{cases}x_1+x_2=5\\2x_1-x_2=1\end{cases}\text{，}(b)\begin{cases}2x_1+x_2-x_3=1\\x_1-3x_2+x_3=-2\\x_1+3x_2-3x_3=-2\end{cases}$$

解答：

(a) 原式可改寫為 $\begin{bmatrix}1&1\\2&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$

引用 Cramer’s Rule 解析公式知：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}5&1\\1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}}=\frac{-6}{-3}=2\text{，}x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&5\\2&1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\2&-1\end{vmatrix}}=\frac{-9}{-3}=3$$

由以上研討知：

$\boxed{x_1=2}$、$\boxed{x_2=3}$

(b) 原式可改寫為 $\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&-3&1\\1&3&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix}$

引用 Cramer’s Rule 解析公式知：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1&1&-1\\-2&-3&1\\-2&3&-3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-3&1\\1&3&-3\end{vmatrix}}=\frac{(9+6-2)-(3+6-6)}{(18+1-3)-(3+6-3)}=\frac{10}{10}=1$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(12+2+1)-(2-4-3)}{(18+1-3)-(3+6-3)} = \frac{20}{10} = 2$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{(12+3-2)-(-3-12-2)}{(18+1-3)-(3+6-3)} = \frac{30}{10} = 3$$

由以上研討知：

$\boxed{x_1 = 1}$、$\boxed{x_2 = 2}$、$\boxed{x_3 = 3}$

範例二
試以 Cramer's Rule 解析以下所示之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解： $(a)\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ 2x_1-x_2=3 \end{cases}$ ，$(b)\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+2x_3=3 \\ -3x_1+x_2+3x_3=8 \end{cases}$

解答：

(a) 原式可改寫為 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

引用 Cramer's Rule 解析公式知：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-6-3}{-3}=3 \text{，} x_2=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{3-12}{-3}=3$$

由以上研討知：

$$\boxed{x_1=3} \text{、} \boxed{x_2=3}$$

(b) 原式可改寫為 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

引用 Cramer's Rule 解析公式知：

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{(-6+16-3)-(2+16+9)}{(-12-1-6)-(-6+4+3)}=\frac{-20}{-20}=1$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&3&2\\-3&8&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-2&2\\-3&1&3\end{vmatrix}}=\frac{(18-8-6)-(9+32+3)}{(-12-1-6)-(-6+4+3)}=\frac{-40}{-20}=2$$

$$x_3=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&-2&3\\-3&1&8\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&-1\\1&-2&2\\-3&1&3\end{vmatrix}}=\frac{(-32+1-9)-(6+6+8)}{(-12-1-6)-(-6+4+3)}=\frac{-60}{-20}=3$$

由以上研討知：

$\boxed{x_1=1}$、$\boxed{x_2=2}$、$\boxed{x_3=3}$