提要 199：矩陣的秩(*Rank*)

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的秩(*Rank*)係指其線性獨立的行向量或線性獨立的列向量，也就是說，若矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的秩為 2，則其線性獨立的行向量為 2，且其線性獨立的列向量也是 2。矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的秩可簡寫為 $Rank(\boldsymbol{A})$，茲以範例說明如下：

範例一
試求如以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之秩： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}$

解答：

❶ 推求線性獨立的列向量

利用高斯消去法，作列向量之運算，亦即：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ (Row1)(2)+Row2 \\ (Row1)(-7)+Row3 \end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ (Row2)\div 2+Row3 \end{matrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因有一列元素全為零，故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之線性獨立的列向量為 2，所以 $Rank(\boldsymbol{A})=2$。

❷ 推求線性獨立的行向量

利用高斯消去法，作行向量之運算。已知：

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 2\\ -6 & 42 & 24 & 54\\ 21 & -21 & 0 & -15\end{bmatrix}$$

讓第一行保持不變；因第二行之第一個元素已是 0，故第二行亦保持不變；接著作第一行乘以$(-2/3)$加第三行、第一行乘以$(-2/3)$加第四行的運算，則上式可改寫爲：

$$A\sim\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ -6 & 42 & 28 & 58\\ 21 & -21 & -14 & -29\end{bmatrix}$$

接著，讓第一、二行均保持不變，然後作第二行乘以$(-28/42)$加第三行、第二行乘以$(-58/42)$加第四行的運算，則上式可改寫爲：

$$A\sim\begin{bmatrix}3 & 0 & 0 & 0\\ -6 & 42 & 0 & 0\\ 21 & -21 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

其中僅兩行元素不全爲 0，即矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之線性獨立的行向量亦爲 2，所以 Rank($\boldsymbol{A}$) = 2。

由以上之說明得知，同一個矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之線性獨立的行向量及線性獨立的列向量確實相同。

範例二
試求如以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之秩： $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&-3&3\\4&5&-5\end{bmatrix}$

解答：

❶ 推求線性獨立的列向量

利用高斯消去法，作列向量之運算，亦即：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&-3&3\\4&5&-5\end{bmatrix}\begin{array}{l}(Row1)\div 3\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1/3&-1/3\\2&-3&3\\4&5&-5\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ (Row1)(-2)+Row2\\ (Row1)(-4)+Row3\end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1/3&-1/3\\0&-11/3&11/3\\0&11/3&-11/3\end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ Row2+Row3\end{array}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&1/3&-1/3\\0&-11/3&11/3\\0&0&0\end{bmatrix}$$

因有一列元素全為零，故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之線性獨立的列向量為 2，所以 $Rank(\boldsymbol{A})=2$。

❷ 推求線性獨立的行向量

利用高斯消去法，作行向量之運算。已知：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&1&-1\\2&-3&3\\4&5&-5\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -3 & 3\\ 4 & 5 & -5\end{bmatrix}$$

$\uparrow$

第一行$\times\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow \quad \sim\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ \frac{2}{3} & -3 & 3\\ \frac{4}{3} & 5 & -5\end{bmatrix}$$

第二行減第一行　第三行加第一行

$$\Rightarrow \quad \sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{11}{3}\\ \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & -\frac{11}{3}\end{bmatrix}$$

第三行加第二行

$$\sim\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & -\frac{11}{3} & 0\\ \frac{4}{3} & \frac{11}{3} & 0\end{bmatrix}$$

其中僅兩行元素不全為 0，即矩陣 ***A*** 之線性獨立的行向量亦為 2，所以 Rank(***A***) = 2。

由以上之說明得知，同一個矩陣 ***A*** 之線性獨立的行向量及線性獨立的列向量確實相同。