提要 198：矩陣 A^m 之計算方式

本單元是接續前一單元之進一步說明。由前一單元之介紹知，已能利用矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵向量(*Eigenvector*)，將矩陣 $\boldsymbol{A}$ 對角化成矩陣 $\boldsymbol{D}$，且對角線元素之值恰為特徵根(*Eigenvalue*)。因為對角矩陣 $\boldsymbol{D}$ 具有許多優異的優點，其中之一就是可以很容易求出 $\boldsymbol{D}^n$。例如，若 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$，則 $\boldsymbol{D}^{20}=\begin{bmatrix}4^{20} & 0\\ 0 & 5^{20}\end{bmatrix}$。故可利用此特性，探討 $\boldsymbol{A}^n$ 之計算方式。說明如下。

已知對角矩陣 $\boldsymbol{D}$ 之計算方式為：

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 矩陣是由矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之所有的特徵向量 $\boldsymbol{X}$ 組合而成。以下可由 $\boldsymbol{D}^n$ 之討論介紹 $\boldsymbol{A}^n$ 之計算方式。因為 $\boldsymbol{D}^n$ 表 n 個($\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$)相乘，即：

$$\boldsymbol{D}^n=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})^n=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\ldots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) \tag{1}$$

因只要矩陣之相乘的前後位置不變，其運算順序是可以改變的。例如：

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \tag{2}$$

而其中之 $\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}$ 是等於單位矩陣 $\boldsymbol{I}$。故上式可改寫為：

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \tag{2'}$$

又任意矩陣 $\boldsymbol{A}$ 乘以單位矩陣 $\boldsymbol{I}$ 之後，仍為任意矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之原來型式，故 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^2$。基於此，式(2’)可表為：

$$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{P}$$

現在式(1)中有 n 個($\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$)相乘，故式(1)應可改寫爲：

$$\boldsymbol{D}^n = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^n = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\ldots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}) = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}$$

亦即：

$$\boxed{\boldsymbol{D}^n = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P}} \tag{3}$$

上式分別於等號左又兩邊前乘及後乘矩陣 $\boldsymbol{P}$ 與矩陣 $\boldsymbol{P}^{-1}$，則：

$$\boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{P})\boldsymbol{P}^{-1} \tag{4}$$

因 $\boldsymbol{PP}^{-1}$ 或 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}$ 是等於單位矩陣 $\boldsymbol{I}$，故式(4)可進一步改寫爲：

$$\boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{IA}^n\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^n$$

即：

$$\boxed{\boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1}}$$

上式即爲計算 $\boldsymbol{A}^n$ 之重要公式。

範例一
試求矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ 的 100 次方 $\boldsymbol{A}^{100}$ 。

解答：

● 步驟一：特徵根的解析

特徵根應由特徵方程式(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}) = 0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) = 0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix} = 0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(-3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

亦即：

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda = -2 \text{、} \lambda = -4$$

● 步驟二：特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=0$$

或

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

✪ 當 $\lambda=-2$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_1+X_2=0 \\ X_1-X_2=0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1=X_2$$

故第一組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}=X_1\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad k\neq 0}$$

✪ 當 $\lambda=-4$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = -X_1$$

故第二組特徵向量可表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

• 步驟三：根據特徵向量建立 *P* 矩陣

已知矩陣 ***A*** 之特徵向量分別為：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{、} \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

故根據特徵向量所組成之矩陣 ***P*** 為：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

然後對矩陣 ***A*** 進行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 之運算，亦即：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-3&1\\1&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&-4\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1\\1&-1\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}-2&-4\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}}{-2}\begin{bmatrix}-2&-4\\-2&4\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{-2}\begin{bmatrix}4&0\\0&8\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-4\end{bmatrix}$$

上式確為呈對角化之矩陣，亦即：

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&-4\end{bmatrix}}$$

且對角線上之元素恰為矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵根！

• 步驟四：推求 $\boldsymbol{A}^{100}$

由應用公式知，$\boldsymbol{A}^{n}=\boldsymbol{PD}^{n}\boldsymbol{P}^{-1}$。所以：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}^{100} &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}^{-1}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^{100} & 0\\ 0 & (-4)^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^{100} & 0\\ 0 & 4^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}2^{100} & 4^{100}\\ 2^{100} & -4^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.5 & 0.5\\ 0.5 & -0.5\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}0.5\left(2^{100}+4^{100}\right) & 0.5\left(2^{100}-4^{100}\right)\\ 0.5\left(2^{100}-4^{100}\right) & 0.5\left(2^{100}+4^{100}\right)\end{bmatrix}\end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix}2^{99}+2\times4^{99} & 2^{99}-2\times4^{99}\\ 2^{99}-2\times4^{99} & 2^{99}+2\times4^{99}\end{bmatrix}}$$

範例二
試求矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$ 的 100 次方 $\boldsymbol{A}^{100}$ 。

解答：

● 步驟一：特徵根的解析

特徵根應由特徵方程式(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\ 4 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(1-\lambda)(2-\lambda)-12=0$$

亦即：

$$\lambda^2-3\lambda-10=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda-5)=0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda=-2 \text{ 、 } \lambda=5$$

● 步驟二：特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

✪ 當$\lambda=-2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 3 \\ 4 & 2-(-2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} 3X_1+3X_2=0 \\ 4X_1+4X_2=0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2=-X_1$$

故第一組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}=X_1\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \quad 或 \quad \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k\neq 0}$$

✪ 當$\lambda=5$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-5 & 3 \\ 4 & 2-5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -4X_1+3X_2=0 \\ 4X_1-3X_2=0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2=\frac{4}{3}X_1$$

故第二組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=X_1\begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix},\quad k\neq 0}$$

• 步驟三：根據特徵向量建立 *P* 矩陣

已知矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵向量分別爲：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}、\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

故根據特徵向量所組成之矩陣 $\boldsymbol{P}$ 爲：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

然後對矩陣 $\boldsymbol{A}$ 進行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 之運算，亦即：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&15\\2&20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}4&-3\\1&1\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3\\-1&4\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}-2&15\\2&20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}4&-3\\1&1\end{bmatrix}}{7}\begin{bmatrix}-2&15\\2&20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-14&0\\0&35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}$$

上式確爲呈對角化之矩陣，亦即：

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}}$$

且對角線上之元素恰爲矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵根！

• 步驟四：推求 A^{100}

由應用公式知，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{PD}^n\boldsymbol{P}^{-1}$。所以：

$$\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}^{100}\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-2)^{100}&0\\0&5^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/7&-3/7\\1/7&1/7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}2^{100}&3\times5^{100}\\-2^{100}&4\times5^{100}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4/7&-3/7\\1/7&1/7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}\frac{4}{7}\times2^{100}+\frac{3}{7}\times5^{100}&-\frac{3}{7}\times2^{100}+\frac{3}{7}\times5^{100}\\-\frac{4}{7}\times2^{100}+\frac{4}{7}\times5^{100}&\frac{3}{7}\times2^{100}+\frac{4}{7}\times5^{100}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7}\times 2^{100} + \frac{3}{7}\times 5^{100} & \frac{3}{7}\times\left(5^{100} - 2^{100}\right) \\ \frac{4}{7}\times\left(5^{100} - 2^{100}\right) & \frac{3}{7}\times 2^{100} + \frac{4}{7}\times 5^{100} \end{bmatrix}$$

亦即：

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^{100} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7}\times 2^{100} + \frac{3}{7}\times 5^{100} & \frac{3}{7}\times\left(5^{100} - 2^{100}\right) \\ \frac{4}{7}\times\left(5^{100} - 2^{100}\right) & \frac{3}{7}\times 2^{100} + \frac{4}{7}\times 5^{100} \end{bmatrix}}$$