提要 197：矩陣的對角化

矩陣若僅對角線元素有值，則此一矩陣稱爲對角矩陣(*Diagonal Matrix*)。若 $\boldsymbol{D}$ 爲對角矩陣，則 $\boldsymbol{D}$ 具有許多優異的優點，其中之一就是可以很容易求出 $\boldsymbol{D}^n$。

例如，若 $\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}$，則 $\boldsymbol{D}^{20}=\begin{bmatrix}4^{20} & 0\\ 0 & 5^{20}\end{bmatrix}$。

對角矩陣既然有這樣的優點，故應想辦法將任意矩陣 $\boldsymbol{A}$ 化簡爲對角矩陣。其方法爲利用矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之所有的特徵向量 $\boldsymbol{X}$，建立組合特徵向量之 $\boldsymbol{P}$ 矩陣，則 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 會呈對角矩陣 $\boldsymbol{D}$，亦即：

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}}$$

而 $\boldsymbol{D}^n=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})^n=(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})\ldots(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$，共 n 個$(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP})$相乘。

範例一
試將矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ 對角化。

解答：

• 步驟一：特徵根的解析

特徵根應由特徵方程式(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

展開上式，可得一個以λ爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(-3-\lambda)^2 - 1 = 0$$

亦即：

$$\lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda+4) = 0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda = -2 \text{、} \lambda = -4$$

• 步驟二：特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

✪ 當$\lambda = -2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = X_2$$

故第一組特徵向量可表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

✪ 當$\lambda = -4$時

式(a)可改寫為：

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = -X_1$$

故第二組特徵向量可表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

• 步驟三：根據特徵向量建立 *P* 矩陣

已知矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵向量分別為：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} 、 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

故根據特徵向量所組成之矩陣 $\boldsymbol{P}$ 為：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

然後對矩陣 $\boldsymbol{A}$ 進行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 之運算，亦即：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}{-2} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{-2} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

上式確為呈對角化之矩陣，亦即：

$$
\boxed{\boldsymbol{D} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}}
$$

且對角線上之元素恰為矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵根！

範例二
試將矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}$ 對角化。

解答：

• 步驟一：特徵根的解析

特徵根應由特徵方程式(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 3\\4 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 3\\4 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(1-\lambda)(2-\lambda)-12=0$$

亦即：

$$\lambda^2-3\lambda-10=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda-5)=0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$$\lambda=-2 \text{、} \lambda=5$$

• 步驟二：特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=0$$

或

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 4 & 2-\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{a}$$

✪ 當$\lambda=-2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-(-2) & 3 \\ 4 & 2-(-2) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} 3X_1+3X_2=0 \\ 4X_1+4X_2=0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2=-X_1$$

故第一組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix}=X_1\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=k\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k\neq 0}$$

✪ 當$\lambda=5$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-5 & 3 \\ 4 & 2-5 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -4X_1 + 3X_2 = 0 \\ 4X_1 - 3X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = \frac{4}{3} X_1$$

故第二組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

• 步驟三：根據特徵向量建立 *P* 矩陣

已知矩陣 ***A*** 之特徵向量分別爲：

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \text{、} \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

故根據特徵向量所組成之矩陣 ***P*** 爲：

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

然後對矩陣 ***A*** 進行 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 之運算，亦即：

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&3\\4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3\\-1&4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-2&15\\2&20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}4&-3\\1&1\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}1&3\\-1&4\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}-2&15\\2&20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{\begin{bmatrix}4&-3\\1&1\end{bmatrix}}{7}\begin{bmatrix}-2&15\\2&20\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}-14&0\\0&35\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}$$

上式確爲呈對角化之矩陣，亦即：

$$\boxed{\boldsymbol{D}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\begin{bmatrix}-2&0\\0&5\end{bmatrix}}$$

且對角線上之元素恰爲矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之特徵根！