提要 196：矩陣的特徵根與特徵向量

矩陣的特徵根(*Eigenvalue*)係與矩陣的特徵向量(*Eigenvector*)是聯合爲一體的，解析矩陣之特徵根 λ 時，可由以下公式推導出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0 \tag{1}$$

而解析矩陣之特徵根 $\boldsymbol{X}$ 時，可由以下公式推導出：

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0} \tag{2}$$

上面這種講法很簡潔，卻常使讀者覺得一頭霧水，不知式(1)與式(2)發生之原因爲何？爲避免發生這種情況，讀者最好能瞭解聯立微分方程式的矩陣解法。以下以範例說明聯立微分方程式的矩陣解法。

範例一
試說明以下所示聯立微分方程式的矩陣解法： $\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases}$

說明：

聯立之齊性微分方程式可表爲：

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \\ \vdots \\ y_n' = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n \end{cases} \tag{a}$$

或

$$\frac{d}{dx}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \qquad \text{(a')}$$

或

$$\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \qquad \text{(a'')}$$

其中 $\boldsymbol{y} = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}$、$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$。

以下是這種聯立齊性微分方程式之通解(*General Solution*)的解析。

• 通解的解析

式(a”)之通解可由齊性微分方程式 $\boldsymbol{y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 研討出，其通解應考慮爲：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = \begin{Bmatrix} X_1 e^{\lambda x} \\ X_2 e^{\lambda x} \\ \vdots \\ X_n e^{\lambda x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix} e^{\lambda x} \qquad \text{(b)}$$

其中 λ 稱爲**特徵根(*Characteristic Root, Eigenvalue*)**。上式亦可表爲：

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{X}e^{\lambda x} \qquad \text{(b')}$$

其中 $\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{Bmatrix}$，稱爲**特徵向量(*Eigenvector*)**。只要特徵根 λ 與特徵向量

$\boldsymbol{X}=\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{Bmatrix}$ 可以研討出，即可解出問題之解。今再將式(b')代入 $\boldsymbol{y}'=\boldsymbol{Ay}$，則：

$$\boldsymbol{AX}e^{\lambda x}=\left(\boldsymbol{X}e^{\lambda x}\right)' \tag{c}$$

上式可繼續化簡爲：

$$\boldsymbol{AX}e^{\lambda x}=\lambda\boldsymbol{X}e^{\lambda x} \tag{c'}$$

然後合併等號左右兩邊：

$$\left(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}\right)\boldsymbol{X}e^{\lambda x}=\boldsymbol{0} \tag{d}$$

上式若展開，則可表爲：

$$\left(\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&0\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{Bmatrix}e^{\lambda x}=\begin{Bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix} \tag{d'}$$

因爲 $\begin{Bmatrix}X_1\\X_2\\\vdots\\X_n\end{Bmatrix}e^{\lambda x}\neq\begin{Bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{Bmatrix}$，所以：

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \text{ 或 } \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = 0 \qquad \text{(e)}$$

上式亦可表為：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{(e')}$$

展開式(e')，可得一個以 λ 為未知數之一元 n 次方程式，稱為**特徵方程式 (*Characteristic Equation*)**，解析此方程式，即可得知問題之 n 個特徵根 λ。最後再將特徵根 λ 代回式(5)，即可解出特徵向量 $\boldsymbol{X}$，利用重疊原理，故式(a)之通解即可研討出，如以下所示：

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix}_h = C_1 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}^{(1)} e^{\lambda_1 x} + C_2 \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}^{(2)} e^{\lambda_2 x} + \cdots + C_n \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}^{(n)} e^{\lambda_n x} \qquad \text{(f)}$$

其中 $\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}^{(n)}$ 表第 n 個特徵根所對應的第 n 組特徵向量。

範例二
試解出矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ 之特徵根及特徵向量。

解答：

● 特徵根的解析

特徵根應由**特徵方程式**(*Characteristic Equation*)研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}-3 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}-3-\lambda & 1\\ 1 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元二次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(-3-\lambda)^2-1=0$$

亦即：

$$\lambda^2+6\lambda+8=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda+2)(\lambda+4)=0$$

故問題之兩個特徵根爲：

$\boxed{\lambda = -2}$、$\boxed{\lambda = -4}$

• 特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

• 當 $\lambda = -2$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-2) & 1 \\ 1 & -3-(-2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_1 = X_2$$

故第一組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}} \quad \text{或} \quad \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

● 當 $\lambda = -4$ 時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} -3-(-4) & 1 \\ 1 & -3-(-4) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_2 = -X_1$$

故第二組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}} \quad \text{或} \quad \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

範例三
試解出矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}$ 之特徵根及特徵向量。

解答：

• 特徵根的解析

特徵根應由**特徵方程式(*Characteristic Equation*)**研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}0-\lambda & 0 & -2\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 1 & 0 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以λ爲未知數之一元三次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$-\lambda(2-\lambda)(3-\lambda)+2(2-\lambda)=0$$

亦即：

$$(2-\lambda)(\lambda^2-3\lambda+2)=0$$

上式可因式分解爲：

$$(\lambda-2)^2(\lambda-1)=0$$

故問題之三個特徵根爲：

$$\boxed{\lambda = 2}、\boxed{\lambda = 2}、\boxed{\lambda = 1}$$

• 特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = 0$$

或

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

• 當$\lambda = 2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 0 & -2 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 1 & 0 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -2X_1 - 2X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_3 = -X_1$$

故特徵向量可表爲：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ -X_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ 0 \\ -X_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ X_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} + X_2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

上式中包含兩組特徵向量，即：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}} \text{ 與 } \boxed{\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

這就是說可由一個特徵根找出兩組特徵向量。通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{s\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad s \neq 0} \text{ 與 } \boxed{t\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad t \neq 0}$$

- **當$\lambda = 1$時**

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 0 & -2 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 1 & 0 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_1 - 2X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + 2X_3 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_3 = -\frac{1}{2} X_1 \text{、} X_2 = -\frac{1}{2} X_1$$

故另一組特徵向量可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -0.5X_1 \\ -0.5X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}} \text{ 或 } \boxed{\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = k \begin{Bmatrix} 1 \\ -0.5 \\ -0.5 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

範例四
試解出矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}$ 之特徵根及特徵向量。

解答：

● 特徵根的解析

特徵根應由**特徵方程式(*Characteristic Equation*)**研討出：

$$\det(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})=0$$

或

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & -1\\1 & 2 & 1\\2 & 2 & 3\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\right)=0$$

亦即：

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & -1\\1 & 2-\lambda & 1\\2 & 2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0$$

展開上式，可得一個以 λ 爲未知數之一元三次方程式，稱爲特徵方程式如下：

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-2+2(2-\lambda)-2(1-\lambda)=0$$
$$\Rightarrow\ (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)=0$$

亦即，問題之三個特徵根爲：

$$\boxed{\lambda=1}、\boxed{\lambda=2}、\boxed{\lambda=3}$$

● 特徵向量的解析

特徵向量應由以下方程式研討出：

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

或

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \text{(a)}$$

- **當$\lambda = 1$時**

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 0 & -1 \\ 1 & 2-1 & 1 \\ 2 & 2 & 3-1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_3 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 + 2X_3 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_3 = 0 \text{ ，} \; X_2 = -X_1$$

故特徵向量可表爲：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -X_1 \\ 0 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

即上式中之特徵向量爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{k\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

• 當$\lambda = 2$時

式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-2 & 0 & -1 \\ 1 & 2-2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -X_1 - X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_3 = -X_1 \text{，} X_2 = -\frac{1}{2}X_1$$

故特徵向量可表爲：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -\frac{1}{2}X_1 \\ -X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}$$

即上式中之特徵向量爲：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表爲：

$$\boxed{k\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

- **當 $\lambda = 3$ 時**

  式(a)可改寫爲：

$$\begin{bmatrix} 1-3 & 0 & -1 \\ 1 & 2-3 & 1 \\ 2 & 2 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

亦即：

$$\begin{cases} -2X_1 - X_3 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 + 2X_2 = 0 \end{cases}$$

由此可知：

$$X_3 = -2X_1 \text{，} X_2 = -X_1$$

故特徵向量可表為：

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ -X_1 \\ -2X_1 \end{Bmatrix} = X_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

即上式中之特徵向量為：

$$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}}$$

通常特徵向量只需表示出其比例變化關係即可，故上式亦可表為：

$$\boxed{k\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}, \quad k \neq 0}$$

【摘要整理】

由以上討論得知，問題之特徵根為$\boxed{\lambda = 1}$、$\boxed{\lambda = 2}$、$\boxed{\lambda = 3}$，所對應之特徵向量分別為$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix}}$、$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \end{Bmatrix}}$、$\boxed{\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{Bmatrix}}$。