提要 195：行列式的基本性質

- 行列式$|A|$中之任一行或任一列之元素均為 0 時，則$|A|$之行列式值為 0。

- 行列式$|A|$中之任兩行或任兩列之元素相等或成等比例時，則$|A|$之行列式值為 0。

- 行列式$|A|$中之某一行或某一列之元素作倍數之放大或縮小後，再與另一行或另一列作相加之運算，則$|A|$之行列式值不變。

  例如：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -7/2 & 3/2 \\ 0 & 5/2 & -5/2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ Row1*(-1/2)+Row2 \\ Row1*(-1/2)+Row3 \end{matrix}$。

- 行列式$|A|$中之任意兩行或任兩列之元素的位置對調後，則$|A|$之行列式差一個負號。

  例如：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$。

- 行列式$|A|$乘以常數 c 時，則僅能取行列式$|A|$中之某一行或某一列的元素乘以常數 c。

  例如：$c\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & 1 & -1 \\ c & -3 & 1 \\ c & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2c & c & -c \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}$。

註：這個觀念和矩陣 $\boldsymbol{A}$ 乘以常數 c 的觀念不同，當矩陣 $\boldsymbol{A}$ 乘以常數 c 時，矩陣 $\boldsymbol{A}$ 中之每一個元素都應乘上常數 c。

- 若行列式$|\boldsymbol{A}|$爲上三角或下三角矩陣，則$|\boldsymbol{A}| = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$。亦即其行列式值等於對角線元素之乘積。

  例如：$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = (2)(-3)(-3) = 18$。

- $|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$。

  例如：$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 9 & 6 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \end{vmatrix}$。

- $|\boldsymbol{A}^{T}| = |\boldsymbol{A}|$。

範例一 任一行或任一列之元素均爲 0
試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值： (a) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$，(b) $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

解答：

(a) $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 0 = 0$

(b) $|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 0$

範例二
任兩行或任兩列之元素相等或成等比例

試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值：

(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$

解答：

(a) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=(1)(2)-(1)(2)=0$

(b)
$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -1\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}\\
&=(2)(1)(-3)+(1)(-1)(1)+(2)(3)(-1)-(-1)(1)(1)-(1)(2)(-3)-(2)(3)(-1)\\
&=(-6)+(-1)+(-6)-(-1)-(-6)-(-6)\\
&=0
\end{aligned}
$$

範例三 任兩行或任兩列之元素相等或成等比例
試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值： (a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 6 & -3\end{bmatrix}$

解答：

(a) $|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=(-1)(2)-(-1)(2)=0$

(b)
$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & 2 & -1\\ 1 & 6 & -3\end{vmatrix}\\
&=(2)(2)(-3)+(2)(-1)(1)+(2)(6)(-1)-(-1)(2)(1)-(2)(2)(-3)-(2)(6)(-1)\\
&=(-12)+(-2)+(-12)-(-2)-(-12)-(-12)\\
&=0
\end{aligned}
$$