# 提要 194：行列式的計算

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 是方陣(*Square Matrix*)時才會有行列式值，而其行列式是表爲 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$，其運算之結果是一個純量(*Scalar*)，而非一個矩陣也不是一個向量。依筆者之經驗，很多讀者都知道 3×3 以下矩陣之行列式值的計算方法，但是對於 4×4 以上矩陣之行列式值的計算就常發生錯誤，請讀者多加留意。以下說明行列式值的計算方法，並以範例中之例題說明其應用方式。

| 3×3 以下方陣行列式的基本觀念 |
|---|
| 1. 若矩陣 $\boldsymbol{A}=\left[a_{11}\right]$ 爲 1×1 之方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值爲：<br>$|\boldsymbol{A}|=a_{11}$<br>2. 若矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 爲 2×2 之方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值爲：<br>$|\boldsymbol{A}|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$<br>3. 若矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 爲 3×3 之方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值爲：<br>$|\boldsymbol{A}|=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{23}a_{32}a_{11}-a_{12}a_{21}a_{33}$ |

## 4×4 以上方陣行列式的進階觀念---拉式展開(*Laplace Expansion*)

若矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$ 為 4×4 之方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值的計算方式較為特別，且與前三種情況不太一樣。其解析需採用降階法，先將 4×4 之方陣，降為 3×3 之方陣，然後再採用 3×3 之方陣的行列式值的計算方式求其行列式值，其降階方式可沿著某一行或某一列。以下之計算方式是沿著第一行作降階，如以下所示：

$$|\boldsymbol{A}|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$+a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{41}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{vmatrix}$$

以下之計算方式是沿著第二列作降階，如以下所示：

$$|\boldsymbol{A}|=-a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$
$$-a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{24}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

其餘展開方式亦可依此類推。其中每一項之正負加減符號與係數 $a_{ij}$ 所在位置有關，並可由 $(-1)^{i+j}$ 加以決定。例如 $a_{21}$ 之下標為 1 與 2，所以 $(-1)^{1+2}=-1$，故 $a_{21}$ 所在位置之加減符號是減號。

範例一

試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值：

$$\text{(a)}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}\text{，(b)}\quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

解答：

## (a) 求矩陣 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$ 之行列式值

問題之行列式值計算過程為：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=(1)(-1)-(1)(2)=-3$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值為：

$$\boxed{|\boldsymbol{A}|=-3}$$

## (b) 求矩陣 $\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$ 之行列式值

問題之行列式值計算過程為：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}&=(2)(-3)(-3)+(1)(3)(-1)+(1)(1)(1)-(-1)(-3)(1)-(1)(3)(2)-(1)(1)(-3)\\&=18-3+1-3-6+3\\&=10\end{aligned}$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值 $|\boldsymbol{A}|$ 為：

$$\boxed{|\boldsymbol{A}|=10}$$

| 範例二 |
|---|
| 試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值：<br>(a) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$，(b) $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$ |

解答：

## (a) 求矩陣$\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$之行列式值

問題之行列式值計算過程爲：

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=(3)(-1)-(1)(2)=-5$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值爲：

$$\boxed{|\boldsymbol{A}|=-5}$$

## (b) 求矩陣$\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$之行列式值

問題之行列式值計算過程爲：

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix}&=(2)(3)(2)+(1)(1)(1)+(2)(2)(-2)-(1)(3)(-2)-(1)(2)(2)-(1)(2)(2)\\ &=12+1-8+6-4-4\\ &=3\end{aligned}$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值$|\boldsymbol{A}|$爲：

$$\boxed{|\boldsymbol{A}|=3}$$

| 範例三 |
| --- |
| 試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值：<br>$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ |

解答：

由 Laplace 展開觀念知：

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} - (0)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\
&= (2)[(3)(-2)(1)+(1)(1)(2)-(3)(1)(1)]-(0)+(1)[(1)(1)(1)+(3)(1)(4)-(2)(1)(4)]-(0) \\
&= (2)[-6+2-3]+[1+12-8] \\
&= -14+5 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值 $|\boldsymbol{A}|$ 為：

$$\boxed{|\boldsymbol{A}|=-9}$$

| 範例四 |
| --- |
| 試解析以下所示矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值： $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&0&1&0\\0&3&0&2\\1&0&-2&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$$ |

解答：

由 Laplace 展開觀念知：

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{A}| &= \begin{vmatrix}2&0&1&0\\0&3&0&2\\1&0&-2&0\\0&1&0&1\end{vmatrix}\\
&=(2)\begin{vmatrix}3&0&2\\0&-2&0\\1&0&1\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}0&0&2\\1&-2&0\\0&0&1\end{vmatrix}+(1)\begin{vmatrix}0&3&2\\1&0&0\\0&1&1\end{vmatrix}-(0)\begin{vmatrix}0&3&0\\1&0&-2\\0&1&0\end{vmatrix}\\
&=(2)\left[(3)(-2)(1)-(2)(-2)(1)\right]-(0)+(1)\left[(1)(1)(2)-(1)(1)(3)\right]-(0)\\
&=(2)\left[-6+4\right]+\left[2-3\right]\\
&=-4-1\\
&=-5
\end{aligned}
$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的行列式值 $|\boldsymbol{A}|$ 為：

$$\boxed{|\boldsymbol{A}|=-5}$$