提要 193：以伴隨矩陣法求反矩陣

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 是方陣(Square Matrix)時才會有反矩陣。伴隨矩陣法(Adjoint Matrix Method)是求反矩陣的傳統方法，很多讀者第一次學反矩陣的算法時，應該都是學伴隨矩陣法，但是相對於高斯-喬登消去法而言，筆者仍推薦較不易出錯之高斯-喬登消去法。以下說明伴隨矩陣法，並以範例中之例題說明其應用方式。

伴隨矩陣法(Adjoint Matrix Method)
若矩陣 $\boldsymbol{A}$ 爲可逆之方陣，則 $\boldsymbol{A}$ 之反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 爲： $$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{adj(\boldsymbol{A})}{\lvert \boldsymbol{A} \rvert}$$ 其中 $adj(\boldsymbol{A})$ 爲 $\boldsymbol{A}$ 之伴隨矩陣，$\lvert \boldsymbol{A} \rvert$ 爲 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值。

範例一

試以伴隨矩陣法解析以下所示矩陣的反矩陣：

$$(a)\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}，(b)\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$$

解答：

(a) 求$\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$之反矩陣

問題之反矩陣計算過程為：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}^{-1}\\
&= \frac{\begin{bmatrix}|-1| & -|1|\\ -|2| & |1|\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}\\
&= \frac{\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}}{-3}\\
&= \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 為：

$$\boxed{\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{bmatrix}}$$

(b) 求$\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$之反矩陣

問題之反矩陣計算過程為：

$$
\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}^{-1}
$$

$$
=\frac{1}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1 & -3\\ 1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\end{bmatrix}
$$

$$
=\frac{1}{\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}6 & 0 & -2\\ 4 & -5 & -3\\ 6 & -5 & -7\end{bmatrix}
$$

其中矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值計算如下：

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{vmatrix} &= (2)(-3)(-3)+(1)(3)(-1)+(1)(1)(1)-(-1)(-3)(1)-(1)(3)(2)-(1)(1)(-3)\\
&=18-3+1-3-6+3\\
&=10
\end{aligned}
$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 爲：

$$
\boxed{\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}6/10 & 0 & -2/10\\ 4/10 & -5/10 & -3/10\\ 6/10 & -5/10 & -7/10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3/5 & 0 & -1/5\\ 2/5 & -1/2 & -3/10\\ 3/5 & -1/2 & -7/10\end{bmatrix}}
$$

範例二
試以伴隨矩陣法解析以下所示矩陣的反矩陣： (a)$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，(b)$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

解答：

(a) 求$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$之反矩陣

問題之反矩陣計算過程為：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}^{-1} &= \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} |-1| & -|1| \\ -|2| & |3| \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} \\
&= \frac{\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}{-5} \\
&= \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 為：

$$
\boxed{\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 1/5 \\ 2/5 & -2/5 \end{bmatrix}}
$$

(b) 求$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$之反矩陣

問題之反矩陣計算過程為：

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}2&2&1\\1&3&2\\-2&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&2&1\\1&3&2\\-2&1&2\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}3&2\\1&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&2\\-2&2\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&1\\-2&2\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&3\\-2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&2\\-2&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{\begin{vmatrix}2&2&1\\1&3&2\\-2&1&2\end{vmatrix}}\begin{bmatrix}4&-3&1\\-6&6&-3\\7&-6&4\end{bmatrix}$$

其中矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之行列式值計算如下：

$$\begin{vmatrix}2&2&1\\1&3&2\\-2&1&2\end{vmatrix}=(2)(3)(2)+(1)(1)(1)+(2)(2)(-2)-(1)(3)(-2)-(1)(2)(2)-(1)(2)(2)$$

$$=12+1-8+6-4-4$$

$$=3$$

故矩陣 $\boldsymbol{A}$ 的反矩陣 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 為：

$$\boxed{\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}4/3&-1&1/3\\-2&2&-1\\7/3&-2&4/3\end{bmatrix}}$$