提要 192：以高斯－喬登消去法求反矩陣

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 是方陣(*Square Matrix*)時才會有反矩陣。高斯－喬登消去法(*Gauss-Jordan Elimination*)是求反矩陣的好方法，因可避免複雜的原矩陣及伴隨矩陣的行列式運算。以下說明高斯－喬登消去法，並以範例說明其應用方式。

高斯－喬登消去法(*Gauss-Jordan Elimination*)
利用高斯－喬登消去法解析矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之反矩陣時，其步驟為： 1. 建立擴展矩陣 $[\boldsymbol{A} \vert \boldsymbol{I}]$。 2. 利用列運算之基本觀念，將擴展矩陣化簡為上三角矩陣。 3. 再利用列運算之基本觀念，以反向疊代方式，將擴展矩陣之上三角矩陣中的非對角線元素化簡為零。使擴展矩陣成為 $[\boldsymbol{I} \vert \boldsymbol{B}]$ 之型式，則其中之矩陣 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}$。

附註：高斯－喬登消去法在反矩陣的運算中佔有很重要的地位。在土木工程的研究所考題中，這一類的考題也是很常見的。

範例一
試以高斯-喬登消去法解析以下所示矩陣的反矩陣： (a)$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$，(b)$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}$

解答：

(a) 求$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$之反矩陣

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣為$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] Row1*(-2)+Row2$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

步驟 3：反向疊代，使擴展矩陣成為$[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B}]$之型式

由步驟 2 之結果知：

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] Row2*(-1/3)$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] Row2*(-1/3)$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 \end{array}\right] Row2*(-1)+Row1$$

故問題之反矩陣為：

$$\boxed{A^{-1}=\begin{bmatrix}1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{bmatrix}}$$

(b) 求$\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & -3\end{bmatrix}$之反矩陣

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣爲$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ Row2*(-2)+Row1\\ Row2*(-2)+Row1\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -5 & 5 & 1 & 0 & -2\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ Row3*(7/5)+Row2\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 7 & -3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4 & 12/5 & -2 & -14/5\end{array}\right]\begin{array}{l}\\ \\ Row3*(7/5)+Row2\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3/7 & 1/7 & -2/7 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & -7/10\end{array}\right]\begin{array}{l}Row1*(1/2)\\ Row2*(1/7)\\ Row3*(1/4)\end{array}$$

步驟 3：反向疊代，使擴展矩陣成為$[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B}]$之型式

由步驟 2 之結果知：

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1/2 & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & -3/7 & 1/7 & -2/7 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & -7/10
\end{array}\right]
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 1/2 & 0 & 4/5 & -1/4 & -7/20 \\
0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/2 & -3/10 \\
0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & -7/10
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
Row3*(1/2)+Row1 \\
Row3*(3/7)+Row2 \\
\
\end{array}
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & -1/5 \\
0 & 1 & 0 & 2/5 & -1/2 & -3/10 \\
0 & 0 & 1 & 3/5 & -1/2 & -7/10
\end{array}\right]
\begin{array}{l}
Row2*(-1/2)+Row1 \\
\\
\
\end{array}
$$

故問題之反矩陣為：

$$
\boxed{\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}
3/5 & 0 & -1/5 \\
2/5 & -1/2 & -3/10 \\
3/5 & -1/2 & -7/10
\end{bmatrix}}
$$

範例二
試以高斯-喬登消去法解析以下所示矩陣的反矩陣： $(a)\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}$，$(b)\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\1 & 3 & 2\\-2 & 1 & 2\end{bmatrix}$

解答：

(a) 求$\begin{bmatrix}3 & 1\\2 & -1\end{bmatrix}$之反矩陣

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣為$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\left[\begin{array}{cc|cc}3 & 1 & 1 & 0\\2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] Row1*(1/3)$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1/3 & 1/3 & 0\\2 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] Row1*(-2)+Row2$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1/3 & 1/3 & 0\\0 & -5/3 & -2/3 & 1\end{array}\right] Row2*(-3/5)$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1/3 & 1/3 & 0\\0 & 1 & 2/5 & -3/5\end{array}\right]$$

步驟 3：反向疊代，使擴展矩陣成為$[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B}]$之型式

由步驟 2 之結果知：

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 1/3 & 1/3 & 0\\0 & 1 & 2/5 & -3/5\end{array}\right] Row2*(-1/3)+Row1$$
$$\sim\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/5 & 1/5\\0 & 1 & 2/5 & -3/5\end{array}\right] Row2*(1/3)+Row1$$

故問題之反矩陣為：

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}1/5 & 1/5\\ 2/5 & -3/5\end{bmatrix}$$

(b) 求$\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix}$之反矩陣

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣為$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ Row2*(-2)+Row1\\ Row2+Row1\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 1 & 0 & 1\end{array}\right]\begin{array}{c}\\ \\ Row3*(4/3)+Row2\end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc}2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & -2 & 4/3\end{array}\right]$$

步驟 3：反向疊代，使擴展矩陣成為$[\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B}]$之型式

由步驟 2 之結果知：

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & -2 & 4/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} Row1*(1/2) \\ Row1*(-1/4) \\ \ \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/4 & -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & -2 & 4/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} Row3*(-1/2)+Row1 \\ Row3*(-3/4)+Row2 \\ \ \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2/3 & 1 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & -2 & 4/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} Row3*(1/2)+Row1 \\ Row3*(3/7)+Row2 \\ \ \end{array}$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -1 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7/3 & -2 & 4/3 \end{array}\right] \begin{array}{l} Row2*(-1)+Row1 \\ \ \\ \ \end{array}$$

故問題之反矩陣爲：

$$\boxed{\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix} 4/3 & -1 & 1/3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 7/3 & -2 & 4/3 \end{bmatrix}}$$