提要 191：以高斯消去法解析聯立線性代數方程式

高斯消去法(*Gauss Elimination*)是解析聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 之解的好方法，因可以避免繁複之反矩陣的運算。以下說明高斯消去法，並以兩範例說明其應用方式。

高斯消去法(*Gauss Elimination*)
利用高斯消去法解析線性之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 時，其步驟爲： 1. 建立擴展矩陣 $[\boldsymbol{A}\|\boldsymbol{b}]$。 2. 利用列運算之基本觀念，將擴展矩陣化簡爲上三角矩陣。 3. 以反向疊代方式，先求出第 n 個未知數，然後第 n–1 個未知數，直至第 1 個未知數爲止。

附註：高斯消去法在線性規劃課程中佔有很重要的地位。在土木工程的研究所考題中，這一類的考題也是很常見的。

範例一
試以高斯消去法解析以下所示之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解： (a) $\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ 2x_1-x_2=1 \end{cases}$，(b) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-3x_2+x_3=-2 \\ x_1+3x_2-3x_3=-2 \end{cases}$

解答：

(a) 原式可改寫爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣為$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} Row1*(-2)+Row2$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

步驟 3：反向疊代

由步驟 2 之結果知，問題已被改寫為：

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, & (1a) \\ -3x_2 = -9, & (1b) \end{cases}$$

由式(1b)知 $x_2 = 3$。再反向代回式(1a)，則 $x_1 + x_2 = 5$ 可改寫為 $x_1 + 3 = 5$，故 $x_1 = 2$。

由以上研討知：

$$\boxed{x_1 = 2}、\boxed{x_2 = 3}$$

(b) 原式可改寫為$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣為$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ Row3*(-2)+Row1 \\ Row3*(-2)+Row1 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{matrix} \\ \\ Row3*(7/5)+Row2 \end{matrix} \\
\sim &\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

步驟 3：反向疊代

由步驟 2 之結果知，問題已被改寫爲：

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_2 - x_3 = 1, & (2a) \\
7x_2 - 3x_3 = 5, & (2b) \\
4x_3 = 12, & (2c)
\end{cases}
$$

由式$(2c)$知$x_3 = 3$。再反向代回式$(2b)$，則$7x_2 - 3x_3 = 5$可改寫爲$7x_2 - 3(3) = 5$，故$x_2 = 2$。最後再將$x_2 = 2$與$x_3 = 3$反向代回式$(2a)$，則$2x_1 + x_2 - x_3 = 1$可表爲$2x_1 + 2 - 3 = 1$，故$x_1 = 1$。

由以上研討知：

$\boxed{x_1 = 1}$、$\boxed{x_2 = 2}$、$\boxed{x_3 = 3}$

範例二

試以高斯消去法解析以下所示之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解：

$$\text{(a)}\begin{cases} x_1+x_2=6 \\ 2x_1-x_2=3 \end{cases}\text{，(b)}\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1 \\ x_1-2x_2+2x_3=3 \\ -3x_1+x_2+3x_3=8 \end{cases}$$

解答：

(a) 原式可改寫爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣爲 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} Row1*(-2)+Row2$$
$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -9 \end{bmatrix}$$

步驟 3：反向疊代

由步驟 2 之結果知，問題已被改寫爲：

$$\begin{cases} x_1+x_2=6, & (1a) \\ -3x_2=-9, & (1b) \end{cases}$$

由式(1*b*)知 $x_2=3$。再反向代回式(1*a*)，則 $x_1+x_2=6$ 可改寫爲 $x_1+3=6$，故 $x_1=3$。

由以上研討知：

$$\boxed{x_1 = 3}、\boxed{x_2 = 3}$$

(b) 原式可改寫爲 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

步驟 1：建立擴展矩陣

由題意知，問題之擴展矩陣爲 $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$。

步驟 2：建立上三角矩陣

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ Row3*(-0.5)+Row1 \\ Row3*(1.5)+Row1 \end{matrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & 2.5 & 1.5 & 9.5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ Row3+Row2 \end{matrix} \\ \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 0 & 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \end{array}$$

步驟 3：反向疊代

由步驟 2 之結果知，問題已被改寫爲：

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=1, & (2a) \\ -2.5x_2+2.5x_3=2.5, & (2b) \\ 4x_3=12, & (2c) \end{cases}$$

由式 $(2c)$ 知 $x_3=3$。再反向代回式 $(2b)$，則 $-2.5x_2+2.5x_3=2.5$ 可改寫為 $-2.5x_2+2.5(3)=2.5$，故 $x_2=2$。最後再將 $x_2=2$ 與 $x_3=3$ 反向代回式$(2a)$，則 $2x_1+x_2-x_3=1$ 可表為 $2x_1+2-3=1$，故 $x_1=1$。

由以上研討知：

$$\boxed{x_1=1}、\boxed{x_2=2}、\boxed{x_3=3}$$