提要 190：矩陣之純量乘積的運算規則

矩陣之純量乘積的運算規則
矩陣 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ 乘以純量(*Scalar*) c 時，矩陣 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 中之每一個元素都要乘以 c，亦即： $\boxed{c\boldsymbol{A}_{m\times n}=\left[ca_{ij}\right]_{m\times n}}$

附註：矩陣乘以純量 c 之運算規則與行列式乘以純量 c 之運算規則大不相同，若是考慮行列式乘以純量 c，則僅能取行列式中之一行或一列乘以純量 c。這樣的運算規則有很大的不同，請讀者務必區分開來。

範例一
已知矩陣 $\boldsymbol{A}$ 分別為： (a) $\boldsymbol{A}_{2\times2}=\begin{bmatrix}1&2\\8&9\end{bmatrix}$，(b) $\boldsymbol{A}_{2\times3}=\begin{bmatrix}1&3&8\\-2&4&-9\end{bmatrix}$，(c) $\boldsymbol{A}_{3\times4}=\begin{bmatrix}3&6&9&1\\-1&2&4&9\\7&6&-8&5\end{bmatrix}$ 試求 $c\boldsymbol{A}$ 之結果。

解答：

(a) $\boxed{c\boldsymbol{A}_{2\times2}=\begin{bmatrix}c&2c\\8c&9c\end{bmatrix}}$

(b) $\boxed{c\boldsymbol{A}_{2\times3}=\begin{bmatrix}c&3c&8c\\-2c&4c&-9c\end{bmatrix}}$

(c) $\boxed{c\boldsymbol{A}_{3\times4}=\begin{bmatrix}3c&6c&9c&c\\-c&2c&4c&9c\\7c&6c&-8c&5c\end{bmatrix}}$

範例二

已知矩陣 $\boldsymbol{B}$ 分別爲：

$$\text{(a)}\ \boldsymbol{B}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & -8\\ 8 & 9\end{bmatrix}，\text{(b)}\ \boldsymbol{B}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 2 & -4\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}，\text{(c)}\ \boldsymbol{B}_{3\times 4}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 7 & 1\\ -1 & 2 & 6 & 2\\ 7 & 6 & -8 & 3\end{bmatrix}$$

試求 $k\boldsymbol{B}$ 之結果。

解答：

(a) $\boxed{k\boldsymbol{B}_{2\times 2}=\begin{bmatrix}k & -8k\\ 8k & 9k\end{bmatrix}}$

(b) $\boxed{k\boldsymbol{B}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}k & 2k & -4k\\ -2k & 4k & k\end{bmatrix}}$

(c) $\boxed{k\boldsymbol{B}_{3\times 4}=\begin{bmatrix}3k & -k & 7k & k\\ -k & 2k & 6k & 2k\\ 7k & 6k & -8k & 3k\end{bmatrix}}$

範例三
已知矩陣 $\boldsymbol{A}$ 分別為： (a) $\boldsymbol{A}_{2\times2}=\begin{bmatrix}1 & 2\\8 & 9\end{bmatrix}$，(b) $\boldsymbol{A}_{3\times3}=\begin{bmatrix}9 & 6 & -8\\7 & 3 & 1\\-4 & 5 & -2\end{bmatrix}$ 試求 $c\left\|\boldsymbol{A}\right\|$ 之結果。

解答：

(a) $c\left|\boldsymbol{A}_{2\times2}\right|=\begin{vmatrix}c & 2\\8c & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2c\\8 & 9c\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}c & 2c\\8 & 9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 2\\8c & 9c\end{vmatrix}$

(b)

$$\begin{aligned}
c\left|\boldsymbol{A}_{3\times3}\right| &= \begin{vmatrix}9c & 6c & -8c\\7 & 3 & 1\\-4 & 5 & -2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}9 & 6 & -8\\7c & 3c & c\\-4 & 5 & -2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}9 & 6 & -8\\7 & 3 & 1\\-4c & 5c & -2c\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}9c & 6 & -8\\7c & 3 & 1\\-4c & 5 & -2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}9 & 6c & -8\\7 & 3c & 1\\-4 & 5c & -2\end{vmatrix}\\
&= \begin{vmatrix}9 & 6 & -8c\\7 & 3 & c\\-4 & 5 & -2c\end{vmatrix}
\end{aligned}$$