提要 189：矩陣之乘法的運算規則

矩陣之乘法的運算規則
矩陣 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 與 $\boldsymbol{B}_{p\times q}$ 要作相乘之運算，也需滿足一個條件及遵守一個原則。 需滿足之條件為： $$n = p$$ 需遵守的原則為： 將第 m 列之列向量與第 q 行之行向量作內積之運算

附註：

1. 通常 $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$。
2. 若 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$，則不見得一定會有 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$ 之結果。

範例一

已知矩陣 ***A*** 與 ***B*** 分別爲：

$$\boldsymbol{A}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 8\\ -2 & 4 & -9\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}_{3\times 4}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 9 & 1\\ -1 & 2 & 4 & 9\\ 7 & 6 & -8 & 5\end{bmatrix}$$

試求 ***AB*** 之結果。

解答：

A 矩陣之列向量與 ***B*** 矩陣之行向量相同，故滿足矩陣相乘之條件，故可進行相乘之運算，如以下所示：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24}\end{bmatrix}$$

其中

$$\begin{aligned}
c_{11}&=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=(1)(3)+(3)(-1)+(8)(7)=15\\
c_{12}&=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=(1)(6)+(3)(2)+(8)(6)=60\\
c_{13}&=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=(1)(9)+(3)(4)+(8)(-8)=-43\\
c_{14}&=a_{11}b_{14}+a_{12}b_{24}+a_{13}b_{34}=(1)(1)+(3)(9)+(8)(5)=68\\
c_{21}&=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=(-2)(3)+(4)(-1)+(-9)(7)=-73\\
c_{22}&=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=(-2)(6)+(4)(2)+(-9)(6)=-58\\
c_{23}&=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}=(-2)(9)+(4)(4)+(-9)(-8)=70\\
c_{24}&=a_{21}b_{14}+a_{22}b_{24}+a_{23}b_{34}=(-2)(1)+(4)(9)+(-9)(5)=-11
\end{aligned}$$

所以：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}15 & 60 & -43 & 68\\ -73 & -58 & 70 & -11\end{bmatrix}$$

範例二
已知矩陣 ***A*** 與 ***B*** 分別爲： $$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\10 & 9 & 8 & 7 & 6\end{bmatrix}、\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}9 & -7\\-5 & 3\\1 & -2\\-4 & 6\\8 & -10\end{bmatrix}$$ 試求 ***AB*** 之結果。

解答：

A 矩陣之列向量與 ***B*** 矩陣之行向量相同，故滿足矩陣相乘之條件，故可進行相乘之運算，如以下所示：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}$$

其中

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}+a_{14}b_{41}+a_{15}b_{51}$$

⇨ $c_{11}=(1)(9)+(2)(-5)+(3)(1)+(4)(-4)+(5)(8)=26$

⇨ $\boxed{c_{11}=26}$

$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}+a_{14}b_{42}+a_{15}b_{52}$$

⇨ $c_{12}=(1)(-7)+(2)(3)+(3)(-2)+(4)(6)+(5)(-10)=-33$

⇨ $\boxed{c_{12}=-33}$

$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}+a_{24}b_{41}+a_{25}b_{51}$$

⇨ $c_{21}=(10)(9)+(9)(-5)+(8)(1)+(7)(-4)+(6)(8)=73$

⇨ $\boxed{c_{21}=73}$

$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}+a_{24}b_{42}+a_{25}b_{52}$$

⇨ $c_{22}=(10)(-7)+(9)(3)+(8)(-2)+(7)(6)+(6)(-10)=-77$

⇨ $\boxed{c_{22}=-77}$

所以：

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}26 & -33\\ 73 & -77\end{bmatrix}$$