提要 187：線性代數的專有名詞

- **線性方程式(*Linear Equation*)**

若包含 n 個未知數 x_1、x_2、…、x_n 的方程式可表爲 $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_ix_i = b$，其中 $a_i\left(i = 1, \cdots, n\right)$ 均爲常數，且未知數 $x_i\left(i = 1, \cdots, n\right)$ 均係呈一次方之型式，則此方程式稱爲線性方程式。

- **聯立線性方程式(*System of Linear Equation*)**

若包含 n 個未知數 x_1、x_2、…、x_n 的方程式有 m 個，：

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \quad \text{或 } \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$、$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$，

則此方程式稱爲聯立線性方程式。

- **矩陣(*Matrix*)**

m 水平列(Row) n 垂直行(*Column*)的矩陣可表爲：

$$\boldsymbol{A} = \left[a_{ij}\right]_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

其中 a_{ij} 表矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之第 i 列第 j 行元素(*Element*)，$m \times n$ 爲矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之階數(*Order*)。

- **列(*Row*)、列矩陣(*Row Matrix*)或列向量(*Row Vector*)**

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之水平元素的集合，稱爲列、列矩陣或列向量，如以下所示：

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

- **行(*Column*)、行矩陣(*Column Matrix*)或行向量(*Column Vector*)**

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之垂直元素的集合，稱爲行、行矩陣或行向量。

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

- 方陣(***Square Matrix***)

矩陣 $\boldsymbol{A}$ 中之 m 個水平列(*Row*)與 n 個垂直行(*Column*)相同時，此矩陣稱爲方陣。如以下所示之矩陣即稱爲方陣：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- 轉置矩陣(***Transpose Matrix***)

將行與列對調後的矩陣，稱爲轉置矩陣。若原矩陣爲 $\boldsymbol{A}$，則其轉置矩陣是以符號 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ 表示。若矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 6 \\ 6 & 7 & 1 \end{bmatrix}$，則其轉置矩陣爲 $\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$。

- 對稱矩陣(***Symmetric Matrix***)

方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之元素 $a_{ij}=a_{ji}$，則此矩陣稱爲對稱矩陣，對稱矩陣符合 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ 的關係。如以下所示之矩陣即稱爲對稱矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{4\times 4}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & -9 & 0 \\ 4 & -9 & 5 & 7 \\ 5 & 0 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

- 反對稱矩陣(***Skew-Symmetric Matrix***)

方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之元素 $a_{ij}=-a_{ji}$，則此矩陣稱爲反對稱矩陣，反對稱矩陣符合 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}$ 的關係。如以下所示之矩陣即稱爲反對稱矩陣，其中之對角線元素均爲 0，這是反對稱矩陣的特色之一：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{4\times 4}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -9 & 0 \\ -4 & 9 & 0 & -7 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

- **零矩陣(*Null Matrix*)**

  方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之元素均爲零時，則此矩陣稱爲零矩陣，例如：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{4\times 4}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **上三角矩陣(*Upper Triangular Matrix*)**

  方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之對角線以下之元素均爲零之矩陣，稱爲上三角矩陣。如以下所示之矩陣即稱爲上三角矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **下三角矩陣(*Lower Triangular Matrix*)**

  方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之對角線以上之元素均爲零之矩陣，稱爲下三角矩陣。如以下所示之矩陣即稱爲下三角矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **對角矩陣(*Diagonal Matrix*)**

  方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之對角線以外的元素均爲零之矩陣，稱爲對角矩陣。如以下所示之矩陣即稱爲對角矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- **單位矩陣(*Unit Matrix*)**

  方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之對角線以外的元素均爲 0，且對角線元素之值均爲 1 時之矩陣，稱爲單位矩陣。如以下所示之矩陣即稱爲單位矩陣：

$$\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

- **子矩陣(*Submatrix*)**

  矩陣 $\boldsymbol{A}$ 中刪去第 i 列及第 j 行元素時，所得出之新矩陣稱爲子矩陣，通常以符號 $\boldsymbol{M}$ 表示。若矩陣 $\boldsymbol{A}=\left[a_{ij}\right]_{4\times4}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&5&6&6\\5&2&1&9\\6&7&0&1\end{bmatrix}$，則如以下所示之矩陣即稱爲子矩陣：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}1&2&4\\5&5&6\\6&7&1\end{bmatrix}$$

- **共軛矩陣(*Conjugate Matrix*)**

  將矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之元素作共軛運算，則所得出之新矩陣稱爲共軛矩陣，常以符號 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 加以表示。若矩陣 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+i&2-2i&4+3i\\5&5-4i&6\\6+i&7&1-3i\end{bmatrix}$，則其共軛矩陣爲 $\overline{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}1-i&2+2i&4-3i\\5&5+4i&6\\6-i&7&1+3i\end{bmatrix}$。

- **賀米特矩陣(*Hermit Matrix*)**

  這是類似對稱矩陣之與複數有關的矩陣。若方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之元素 $\bar{a}_{ij}=a_{ji}$，則此矩陣稱爲賀米特矩陣，賀米特矩陣符合 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}=\boldsymbol{A}$ 的關係。如以下所示之矩陣即稱爲賀米特矩陣：

$$A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}=\begin{bmatrix}1 & 2+i\\ 2-i & 3\end{bmatrix}$$

- **反賀米特矩陣(*Skew-Hermit Matrix*)**

這是類似反對稱矩陣之與複數有關的矩陣。若方陣 $\boldsymbol{A}$ 中之元素 $\overline{a}_{ij}=-a_{ij}$，則此矩陣即稱爲反賀米特矩陣，反賀米特矩陣符合 $\overline{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{T}}=-\boldsymbol{A}$ 的關係。如以下所示之矩陣即稱爲反賀米特矩陣：

$$A=\left[a_{ij}\right]_{2\times 2}=\begin{bmatrix}i & -2+i\\ 2-i & 5i\end{bmatrix}$$

- **反矩陣(*Inverse Matrix*)**

若 n 階之兩個方陣 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相乘後等於單位矩陣 $\boldsymbol{I}$，則矩陣 $\boldsymbol{B}$ 稱爲矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之反矩陣，通常以符號 $\boldsymbol{A}^{-1}$表矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之反矩陣。亦即若：

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{I}$$

則矩陣 $\boldsymbol{B}$ 稱爲矩陣 $\boldsymbol{A}$ 之反矩陣，常以符號 $\boldsymbol{A}^{-1}$表示矩陣 $\boldsymbol{B}$。也就是說：

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}\text{ 或 }\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

- **正交矩陣(*Orthogonal Matrix*)**

若 n 階之方陣 $\boldsymbol{A}$ 滿足以下的關係式：

$$\boldsymbol{AA}^{T}=\boldsymbol{I}\text{ 或 }\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

則矩陣 $\boldsymbol{A}$ 稱爲正交矩陣。

- **單式矩陣(*Unitary Matrix*)**

這是類似正交矩陣之與複數有關的矩陣。若 n 階之方陣 $\boldsymbol{A}$ 滿足以下的關係式：

$$\boldsymbol{A}\overline{\boldsymbol{A}}^{T}=\boldsymbol{I}\text{ 或 }\overline{\boldsymbol{A}}^{T}=\boldsymbol{A}^{-1}$$

則矩陣 $\boldsymbol{A}$ 稱爲單式矩陣。

- **擴展矩陣(*Augmented Matrix*)**

在解析線性之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 時，若將係數矩陣 $\boldsymbol{A}$ 與 $\boldsymbol{b}$ 矩陣組合起來，則此新矩陣稱爲擴展矩陣，如以下所示：

$$\left[A|b\right]\text{或}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m\end{bmatrix}$$

註： $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 之展開型式爲：

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

- **齊次系統(*Homogeneous System*)**

  線性之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中的 $\boldsymbol{b}=\mathbf{0}$ 時，該矩陣稱爲齊次系統。亦即 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 是個齊次系統。

註：「*Homogeneous*」這個字在翻譯時，除常被譯爲「齊次的」之外，亦常被譯爲「齊性的」。

- **非齊次系統(*Non-homogeneous System*)**

  線性之聯立代數方程式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中的 $\boldsymbol{b}\neq\mathbf{0}$ 時，該矩陣稱爲非齊次系統。

註：「*Non-homogeneous*」這個字在翻譯時，除常被譯爲「非齊次的」之外，亦常被譯爲「非齊性的」。