提要 185：*Laplace* 積分轉換方法與傳統解法的比較

Laplace 積分轉換主要是用來解微分方程式用的，但傳統方法也可以用來解微分方程式，這兩者之間差異性的比較，是本單元的重點。

以 *Laplace* 積分轉換解析常微分方程式時，其解析過程如圖 1 所示；以 *Laplace* 積分轉換解析偏微分方程式時，其解析過程如圖 2 所示。

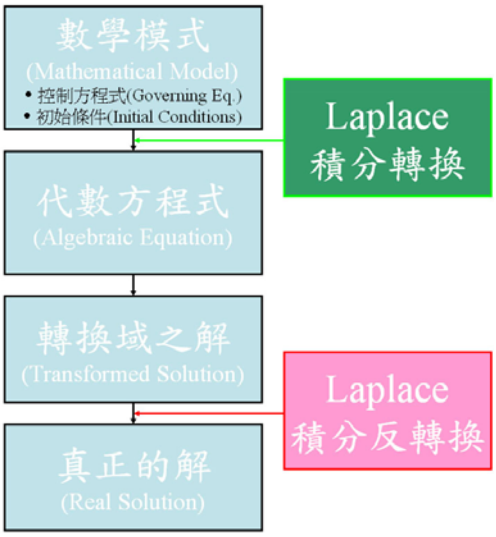


圖 1　以 *Laplace* 積分轉換解析常微分方程式之觀念流程圖

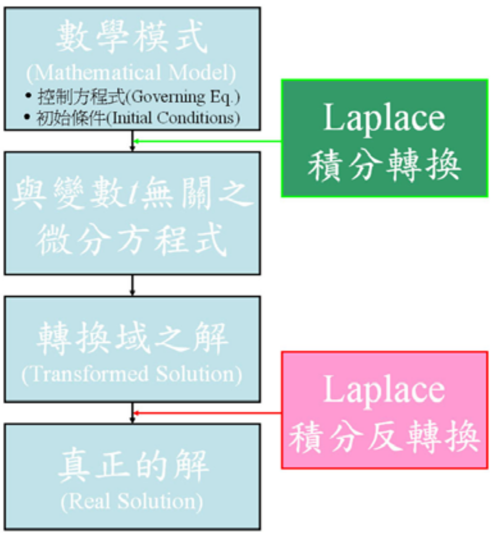
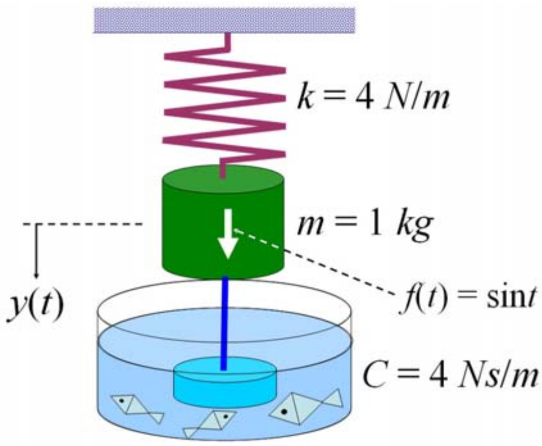


圖 2　以 *Laplace* 積分轉換解析偏微分方程式之觀念流程圖

範例一
試解析如下所示振動問題之數學模式： $$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t \text{ ， } y(0)=0 \text{ ， } \frac{dy(0)}{dt}=1$$  其中 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t$ 是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；$y(0)=0$ 表物體之初始位置爲平衡位置；$\frac{dy(0)}{dt}=1$ 指物體之向下初始速度爲 $1m/s$。本題是擬推求質量爲 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析。首先讓控制方程式乘以 e^{-st} ，再對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y\right)e^{-st}dt=\int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt$$

上式等號左邊可改寫爲先積分再作相加之運算：

$$\int_0^\infty\frac{d^2y}{dt^2}e^{-st}dt+\int_0^\infty 4\frac{dy}{dt}e^{-st}dt+\int_0^\infty 4y\,e^{-st}dt=\int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt$$

再進行部分積分(*Integration by Part*，或譯爲分佈積分)之運算，此一運算是各個 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據方法，讀者若是初學者，請暫時接受以下所

示之結果。基於此，上式可改寫爲：

$$\left[s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt - sy(0) - \frac{dy(0)}{dt}\right] + 4\left[s\int_0^\infty y\,e^{-st}dt - y(0)\right] + 4\int_0^\infty y\,e^{-st}dt = \frac{1}{s^2+1}$$

再將問題之初始條件 $y(0)=0$ 、$\dfrac{dy(0)}{dt}=1$ 代入上式，則可得：

$$\left[s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt - 1\right] + 4s\int_0^\infty y\,e^{-st}dt + 4\int_0^\infty y\,e^{-st}dt = \frac{1}{s^2+1}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第二個部分。經整理後，可得：

$$\left(s^2+4s+4\right)\int_0^\infty y\,e^{-st}dt = \frac{1}{s^2+1} + 1 = \frac{s^2+2}{s^2+1}$$

亦即：

$$\int_0^\infty y\,e^{-st}dt = \frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$$

上式稱爲問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，通常以符號 $Y(s)$ 表示之。也就是說，問題於 s 定義域之解爲：

$$Y(s) = \frac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第三個部分。以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行上式之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} Y(s)e^{st}ds$，但是此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，所以無能爲力；二是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，這些公式，後續單元會逐一介紹，但這裏先將這 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式列出，如表 1 所示，以方便應用。

茲將 $Y(s) = \dfrac{s^2+2}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$ 化簡爲簡單之部分分式，亦即考慮：

$$Y(s)=\frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{cs+d}{s^2+4s+4}$$

通分後，可得：

$$Y(s)=\frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}=\frac{(a+c)s^3+(4a+b+d)s^2+(4a+4b+c)s+(4b+d)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+d=1 \\ 4a+4b+c=0 \\ 4b+d=2 \end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得：$a=-\frac{4}{25}$ 、 $b=\frac{3}{25}$ 、 $c=\frac{4}{25}$ 、 $d=\frac{38}{25}$ 。亦即：

$$\begin{aligned} Y(s)&=\frac{s^2+2}{(s^2+1)(s^2+4s+4)} \\ &=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s+3}{s^2+1}+\frac{4s+38}{s^2+4s+4}\right) \\ &=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4s+8+30}{s^2+4s+4}\right) \\ &=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2}+\frac{30}{(s+2)^2}\right] \\ &=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4}{s+2}+\frac{30}{(s+2)^2}\right] \end{aligned}$$

因此問題於時間域 t 之解為：

$$y(t)=-\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{3}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}+\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{30}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

由表 1 知， $L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$ ， $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ ， $L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}$ ，

$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}=te^{-2t}$，故問題之解為：

$$y(t)=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{30}{25}te^{-2t}$$

上式即為此問題之解。

另解

本題亦可採用第二章所介紹的方法求解，其步驟分為三部分。第一步是求出問題之齊性解(*Homogeneous Solution*) $y_h(t)$；第二步是求出問題之非齊性解(*Non-homogeneous Solution*)，也就是找出滿足非齊性項的特解(*Particular Solution*) $y_p(t)$。根據第一步與第二步的解析結果，即可解出問題之通解(*General Solution*) $y=y_h+y_p$。第三個步驟是將問題之初始條件代入通解中，用以求出滿足初始條件之特解。以下分別說明之。

步驟一　求齊性解

由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$ 解析問題之齊性解。考慮問題之齊性解與自然指數有關，亦即，令：

$$y_h=e^{\lambda t}$$

再代入齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$ 中，則：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda t}\right)}{dt^2}+4\frac{d\left(e^{\lambda t}\right)}{dt}+4\left(e^{\lambda t}\right)=0$$

上式可化簡為：

$$\left(\lambda^2+4\lambda+4\right)e^{\lambda t}=0$$

因爲$e^{\lambda t} \neq 0$，故

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

上式稱爲**特徵方程式**(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式即可解出特徵根，分別爲：

$$\lambda = -2 \text{、} -2$$

因係屬重根情況，故問題之齊性解爲：

$$y_h = C_1 e^{-2t} + C_2 t e^{-2t}$$

步驟二　求非齊性解

此刻，作者擬根據待定係數法求非齊性解。因問題之非齊性項爲$\sin t$，故依據待定係數法之**基本原則**(*Basic Rule*)，考慮問題之非齊性解y_p爲：

$$y_p = A\cos t + B\sin t$$

再將y_p代回原常微分方程式：

$$\frac{d^2(A\cos t + B\sin t)}{dt^2} + 4\frac{d(A\cos t + B\sin t)}{dt} + 4(A\cos t + B\sin t) = \sin t$$

則上式可表爲：

$$(-A\cos t - B\sin t) + 4(-A\sin t + B\cos t) + 4(A\cos t + B\sin t) = \sin t$$

比較係數知：

$$\begin{cases} 3A + 4B = 0 \\ -4A + 3B = 1 \end{cases}$$

基於此，可解出$A=-\dfrac{4}{25}$、$B=\dfrac{3}{25}$。故非齊性解y_p爲：

$$y_p=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t$$

而通解y是齊性解y_h與非齊性解y_p的組合，亦即：

$$y=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t$$

步驟三　求滿足初始條件的特解

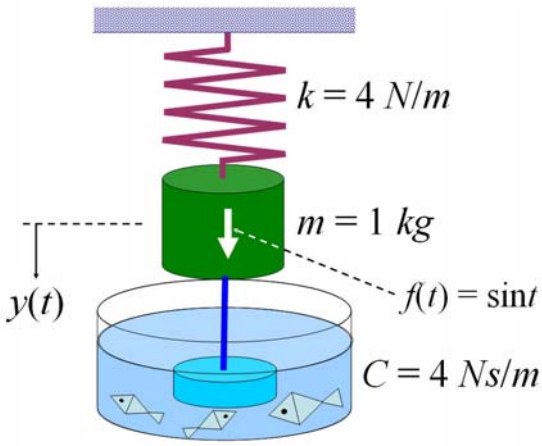
已知問題之初始條件爲：$y(0)=0$、$\dfrac{dy(0)}{dt}=1$。這兩個初始條件剛好夠解出通解中之兩個未知常數C_1與C_2，說明如下。茲將依據步驟一與步驟二所得出之通解代入初始條件中，則：

$$\begin{cases} 0=C_1e^{-2(0)}+C_2(0)e^{-2(0)}-\dfrac{4}{25}\cos(0)+\dfrac{3}{25}\sin(0) \\ 1=-2C_1e^{-2(0)}+C_2(1-2\cdot 0)e^{-2(0)}+\dfrac{4}{25}\sin(0)+\dfrac{3}{25}\cos(0) \end{cases}$$

故$C_1=\dfrac{4}{25}$、$C_2=\dfrac{30}{25}$，因此滿足初始條件之特解爲：

$$\boxed{y=\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{30}{25}te^{-2t}-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t}$$

以上所求出之解與引用 *Laplace* 積分轉換方法所得出之解完全相同。

範例二
試解析如下所示振動問題之數學模式： $$\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t \text{，} y(0)=0 \text{，} \frac{dy(0)}{dt}=0$$  其中 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=\sin t$ 是根據牛頓第二運動定律所建立之控制方程式；$y(0)=0$ 表物體之初始位置爲平衡位置；$\frac{dy(0)}{dt}=0$ 指物體之向下初始速度爲零。本題是擬推求質量爲 m 之物體於任意時刻的位移量 $y(t)$。

解答：

本題是擬採用 *Laplace* 積分轉換方法加以解析。首先讓控制方程式乘以 e^{-st}，再對變數 t 作 $[0,\infty)$ 之積分，亦即：

$$\int_0^\infty\left(\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y\right)e^{-st}dt=\int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt$$

上式等號左邊可改寫爲先積分再作相加之運算：

$$\int_0^\infty\frac{d^2y}{dt^2}e^{-st}dt+\int_0^\infty 4\frac{dy}{dt}e^{-st}dt+\int_0^\infty 4y\,e^{-st}dt=\int_0^\infty \sin t\, e^{-st}dt$$

再進行部分積分(*Integration by Part*，或譯爲分佈積分)之運算，此一運算是各個 *Laplace* 積分轉換公式推導時之依據方法，讀者若是初學者，請暫時接受以下所

示之結果。基於此，上式可改寫爲：

$$\left[s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt-sy(0)-\frac{dy(0)}{dt}\right]+4\left[s\int_0^\infty y\,e^{-st}dt-y(0)\right]+4\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1}$$

再將問題之初始條件 $y(0)=0$ 、$\dfrac{dy(0)}{dt}=0$ 代入上式，則可得：

$$s^2\int_0^\infty y\,e^{-st}dt+4s\int_0^\infty y\,e^{-st}dt+4\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第二個部分。經整理後，可得：

$$\left(s^2+4s+4\right)\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{1}{s^2+1}=\frac{1}{s^2+1}$$

亦即：

$$\int_0^\infty y\,e^{-st}dt=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$$

上式稱爲問題於 *Laplace* 積分轉換域之解，通常以符號 $Y(s)$ 表示之。也就是說，問題於 s 定義域之解爲：

$$Y(s)=\frac{1}{\left(s^2+1\right)\left(s^2+4s+4\right)}$$

上式即爲圖 1 所示解析流程圖中之第三個部分。以下需進行 *Laplace* 積分反轉換，通常，這是整個解析過程中最困難的部分，說明如下。進行上式之 *Laplace* 積分反轉換有兩種方法，一是直接引用 *Laplace* 積分反轉換之定義，亦即 $y(t)=\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}Y(s)e^{st}ds$，但是此一積分式之計算，與複數變數之積分有關，目前大部分的讀者都尚未學過複變分析，所以無能爲力；二是引用所背下來的 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式，這些公式，後續單元會逐一介紹，但這裏先將這 17 個 *Laplace* 積分反轉換公式列出，如表 1 所示，以方便應用。

茲將$Y(s)=\dfrac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$化簡爲簡單之部分分式，亦即考慮：

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}=\frac{as+b}{s^2+1}+\frac{cs+d}{s^2+4s+4}$$

通分後，可得：

$$Y(s)=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}=\frac{(a+c)s^3+(4a+b+d)s^2+(4a+4b+c)s+(4b+d)}{(s^2+1)(s^2+4s+4)}$$

比較係數後可知：

$$\begin{cases} a+c=0 \\ 4a+b+d=0 \\ 4a+4b+c=0 \\ 4b+d=1 \end{cases}$$

解析此聯立代數方程式可得：$a=-\dfrac{4}{25}$ 、 $b=\dfrac{3}{25}$ 、 $c=\dfrac{4}{25}$ 、 $d=\dfrac{13}{25}$ 。亦即：

$$\begin{aligned} Y(s)&=\frac{1}{(s^2+1)(s^2+4s+4)} \\ &=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s+3}{s^2+1}+\frac{4s+13}{s^2+4s+4}\right) \\ &=\frac{1}{25}\left(\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4s+8+5}{s^2+4s+4}\right) \\ &=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4(s+2)}{(s+2)^2}+\frac{5}{(s+2)^2}\right] \\ &=\frac{1}{25}\left[\frac{-4s}{s^2+1}+\frac{3}{s^2+1}+\frac{4}{s+2}+\frac{5}{(s+2)^2}\right] \end{aligned}$$

因此問題於時間域 t 之解爲：

$$y(t)=-\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}+\frac{3}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}+\frac{4}{25}L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}+\frac{1}{5}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$，$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$，$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}=e^{-2t}$，$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\}=te^{-2t}$，故問題之解爲：

$$\boxed{y(t)=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t+\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{1}{5}te^{-2t}}$$

上式即爲此問題之解。

另解

本題亦可採用第二章所介紹的方法求解，其步驟分爲三部分。第一步是求出問題之齊性解(*Homogeneous Solution*) $y_h(t)$；第二步是求出問題之非齊性解(*Non-homogeneous Solution*)，也就是找出滿足非齊性項的特解(*Particular Solution*) $y_p(t)$。根據第一步與第二步的解析結果，即可解出問題之通解(*General Solution*) $y=y_h+y_p$。第三個步驟是將問題之初始條件代入通解中，用以求出滿足初始條件之特解。以下分別說明之。

步驟一　求齊性解

由齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$ 解析問題之齊性解。考慮問題之齊性解與自然指數有關，亦即，令：

$$y_h=e^{\lambda t}$$

再代入齊性微分方程式 $\frac{d^2y}{dt^2}+4\frac{dy}{dt}+4y=0$ 中，則：

$$\frac{d^2\left(e^{\lambda t}\right)}{dt^2}+4\frac{d\left(e^{\lambda t}\right)}{dt}+4\left(e^{\lambda t}\right)=0$$

上式可化簡爲：

$$\left(\lambda^2+4\lambda+4\right)e^{\lambda t}=0$$

因爲 $e^{\lambda t}\neq 0$ ，故

$$\lambda^2+4\lambda+4=0$$

上式稱爲**特徵方程式**(*Characteristic Equation*)。由特徵方程式即可解出特徵根，分別爲：

$$\lambda=-2\text{、}-2$$

因係屬重根情況，故問題之齊性解爲：

$$y_h=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}$$

步驟二　求非齊性解

此刻，作者擬根據待定係數法求非齊性解。因問題之非齊性項爲 $\sin t$ ，故依據待定係數法之**基本原則**(*Basic Rule*)，考慮問題之非齊性解 y_p 爲：

$$y_p=A\cos t+B\sin t$$

再將 y_p 代回原常微分方程式：

$$\frac{d^2\left(A\cos t+B\sin t\right)}{dt^2}+4\frac{d\left(A\cos t+B\sin t\right)}{dt}+4\left(A\cos t+B\sin t\right)=\sin t$$

則上式可表爲：

$$\left(-A\cos t-B\sin t\right)+4\left(-A\sin t+B\cos t\right)+4\left(A\cos t+B\sin t\right)=\sin t$$

比較係數知：

$$\begin{cases}3A+4B=0\\-4A+3B=1\end{cases}$$

基於此，可解出$A=-\dfrac{4}{25}$ 、 $B=\dfrac{3}{25}$ 。故非齊性解y_p爲：

$$y_p=-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t$$

而通解y是齊性解y_h與非齊性解y_p的組合，亦即：

$$y=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t$$

步驟三　求滿足初始條件的特解

已知問題之初始條件爲： $y(0)=0$ 、 $\dfrac{dy(0)}{dt}=0$ 。這兩個初始條件剛好夠解出通解中之兩個未知常數C_1與C_2 ，說明如下。茲將依據步驟一與步驟二所得出之通解代入初始條件中，則：

$$\begin{cases}0=C_1e^{-2(0)}+C_2\left(0\right)e^{-2(0)}-\dfrac{4}{25}\cos\left(0\right)+\dfrac{3}{25}\sin\left(0\right)\\0=-2C_1e^{-2(0)}+C_2\left(1-2\cdot 0\right)e^{-2(0)}+\dfrac{4}{25}\sin\left(0\right)+\dfrac{3}{25}\cos\left(0\right)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}0=C_1-\dfrac{4}{25}\\0=-2C_1+C_2+\dfrac{3}{25}\end{cases}$$

故$C_1=\dfrac{4}{25}$ 、 $C_2=\dfrac{1}{5}$ ，因此滿足初始條件之特解爲：

$$\boxed{y=\frac{4}{25}e^{-2t}+\frac{1}{5}te^{-2t}-\frac{4}{25}\cos t+\frac{3}{25}\sin t}$$

以上所求出之解與引用 *Laplace* 積分轉換方法所得出之解完全相同。

表 1　常用之 17 個 Laplace 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)=\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]\left[\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right]$