提要 184：*Laplace* 反轉換的挑戰-迴積分定理的應用

以 *Laplace* 積分轉換方法解析問題之解時，其中之最大的挑戰就是 *Laplace* 反轉換無法順利完成。特別是當問題難以化簡爲表 1 中之 17 個基本型式時，真的是很爲難。通常，出題目的老師並不會將題目出得太難，以致於表 1 中之基本關係式不夠用。但在工程的實際應用上，確實有可能會發生表 1 中之基本關係式不夠用的情況。這裏擬舉幾個較麻煩的例子，說明如何引用表 1 中之迴積分定理 (*Convolution Theorem*)進行 *Laplace* 反轉換的運算。

範例一
試完成以下問題之 *Laplace* 反轉換的解析： (a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$；(b) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-a)}\right\}$。

解答：

(a) 已知迴積分定理爲：

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

故可將 $F(s)$與 $G(s)$視爲：

$$F(s)=G(s)=\frac{1}{s^2+1}$$

而 $F(s)$與 $G(s)$之 *Laplace* 反轉換爲：

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$$

故：

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$
$$=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$$

因爲：

$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$
$$\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$$

所以：

$$\sin a\sin b=\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$$

因此：

$$\sin\tau\sin(t-\tau)=\frac{1}{2}\left[\cos(\tau+(t-\tau))+\cos(\tau-(t-\tau))\right]=\frac{1}{2}\left[\cos(t)+\cos(2\tau-t)\right]$$

故 *Laplace* 反轉換問題 $L^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s^2+1\right)^2}\right\}$ 可繼續改寫爲：

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}=\int_0^t \sin\tau\sin(t-\tau)d\tau$$

$$=\int_0^t \frac{1}{2}[\cos(t)+\cos(2\tau-t)]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t \cos(t)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau-t)d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\cos(t)\int_0^t d\tau+\frac{1}{2}\int_0^t \cos(2\tau-t)d\tau$$

$$=\frac{\cos(t)}{2}[\tau]_0^t+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2\tau-t)\right]_0^t$$

$$=\frac{\cos(t)}{2}[t-0]+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(2t-t)-\frac{1}{2}\sin(0-t)\right]$$

$$=\frac{t\cos(t)}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(t)-\frac{1}{2}\sin(-t)\right]$$

$$=\frac{t\cos(t)}{2}+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin(t)+\frac{1}{2}\sin(t)\right]$$

$$=\frac{t\cos(t)}{2}+\frac{\sin(t)}{2}$$

亦即：

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+1)^2}\right\}=\frac{t\cos t}{2}+\frac{\sin t}{2}}$$

(b) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$之 *Laplace* 反轉換亦類似上題之計算過程。已知迴積分定理為：

$$L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

故可將$F(s)$與$G(s)$視為：

$$F(s)=\frac{1}{s^2}\text{ ， }G(s)=\frac{1}{s-a}$$

而$F(s)$與$G(s)$之 *Laplace* 反轉換為：

$$f(t)=L^{-1}\{F(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$$

$$g(t)=L^{-1}\{G(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}=e^{at}$$

故：

$$\begin{aligned}
L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \tau\, e^{a(t-\tau)}d\tau \\
&= \int_0^t \tau\, e^{at}e^{-a\tau}d\tau \\
&= e^{at}\int_0^t \tau\, e^{-a\tau}d\tau \\
&= e^{at}\int_0^t \tau\, d\left(-\frac{e^{-a\tau}}{a}\right) \\
&= e^{at}\left[\tau\left(-\frac{e^{-a\tau}}{a}\right)_0^t-\int_0^t\left(-\frac{e^{-a\tau}}{a}\right)d\tau\right] \\
&= e^{at}\left[t\left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)-0+\int_0^t\left(\frac{e^{-a\tau}}{a}\right)d\tau\right] \\
&= e^{at}\left[t\left(-\frac{e^{-at}}{a}\right)-0+\left(-\frac{e^{-a\tau}}{a^2}\right)_0^t\right] \\
&= e^{at}\left[-\frac{te^{-at}}{a}+\left(-\frac{e^{-at}}{a^2}+\frac{e^0}{a^2}\right)\right] \\
&= -\frac{t}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{e^{at}}{a^2}
\end{aligned}$$

故 $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}$ 之 *Laplace* 反轉換結果爲：

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\}=\frac{e^{at}-1-at}{a^2}$$

範例二
試求：(a) $L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}$ (b) $L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}$

解答：

(a) 因為已知 $L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$，所以

$$L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}=L\left\{e^{t}\right\}L\left\{\cos t\right\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}=\frac{1}{s-1}\frac{s}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}=\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}$$

即問題(a)之解為 $\boxed{L\left\{\int_0^t e^{\tau}\cos(t-\tau)\,d\tau\right\}=\frac{s}{(s-1)(s^2+1)}}$。

(b) 因為已知 $L\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\}=F(s)G(s)$，所以

$$L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}=L\left\{e^{t}\right\}L\left\{\sin t\right\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}=\frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$$

即問題(b)之解為 $\boxed{L\left\{\int_0^t e^{\tau}\sin(t-\tau)\,d\tau\right\}=\frac{1}{(s-1)(s^2+1)}}$。

範例三
試求：(a) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-2)}\right\}$ (b) $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s+2)}\right\}$

解答：

(a) 因為已知 $L^{-1}\{F(s)G(s)\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right)_{t\text{換為}\tau}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}\right)_{t\text{換為}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t(t)_{t\text{換為}\tau}\left(e^{2t}\right)_{t\text{換為}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{2(t-\tau)}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{2t}e^{-2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\int_0^t\tau e^{-2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\int_0^t\tau d\left(\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right)$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[\tau\left(\frac{e^{-2\tau}}{-2}\right)-\int\frac{e^{-2\tau}}{-2}d\tau\right]_0^t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[-\frac{\tau e^{-2\tau}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2\tau}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{(0)e^{-2(0)}}{2}+\frac{1}{4}e^{-2(0)}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=e^{2t}\left[-\frac{te^{-2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-2)}\right\}=-\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2t}$$

即問題(a)之解為 $L^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2(s-2)}\right\}=-\dfrac{t}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}e^{2t}$。

(b) 因爲已知$L^{-1}\left\{F(s)G(s)\right\}=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$，所以

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}\right)_{t\text{換爲}\tau}\left(L^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\right)_{t\text{換爲}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t(t)_{t\text{換爲}\tau}\left(e^{-2t}\right)_{t\text{換爲}t-\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{-2(t-\tau)}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\int_0^t\tau e^{-2t}e^{2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\int_0^t\tau e^{2\tau}d\tau$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\int_0^t\tau d\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\tau\left(\frac{e^{2\tau}}{2}\right)-\int\frac{e^{2\tau}}{2}d\tau\right]_0^t$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{\tau e^{2\tau}}{2}-\frac{1}{4}e^{2\tau}\right]_0^t$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{te^{2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{2t}-\frac{(0)e^{2(0)}}{2}+\frac{1}{4}e^{2(0)}\right]$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=e^{-2t}\left[\frac{te^{2t}}{2}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow\ L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2t}$$

即問題(b)之解爲$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s+2)}\right\}=\frac{t}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{-2t}$。

表 1　應背下來的 17 個 *Laplace* 積分轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$