提要 183：題目給 $t \neq 0$ 之初始條件時的 *Laplace* 轉換解析

在大部分的微分方程式題目中，都是給予 $t = 0$ 時的條件，因此可以很順利的引用 *Laplace* 積分轉換方法解析出問題之解。但是經驗告訴我，有不少讀者遇到 $t \neq 0$ 的條件時，就不知道怎麼辦了。以下以兩範例，說明問題之解析過程。

範例一
試引用 *Laplace* 積分轉換方法，解析以下所示之常微分方程式的解。 $y'' + y = 2t$，$y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$，$y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2 - \sqrt{2}$。

解答：

將常微分方程式作 *Laplace* 積分轉換，則：

$$L\{y''\} + L\{y\} = L\{2t\} \tag{1}$$

已知 $L\{y''\} = s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)$，故式(1)可表爲：

$$s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0) + L\{y\} = L\{2t\} \tag{2}$$

這個時候，並沒有辦法決定 $y(0)$ 及 $y'(0)$ 之值，但可將其視爲常數，保留下來。故：

$$(s^2+1)L\{y\} = L\{2t\} + sy(0) + y'(0) \tag{2'}$$

因爲 $L\{t\} = 1/s^2$，故上式可再改寫爲：

$$L\{y\} = \frac{2}{s^2(s^2+1)} + y(0)\frac{s}{s^2+1} + y'(0)\frac{1}{s^2+1} \tag{3}$$

上式等號右邊之第一項再拆解爲簡單之部分分式：

$$L\{y\} = \frac{2}{s^2} + \frac{-2}{s^2+1} + y(0)\frac{s}{s^2+1} + y'(0)\frac{1}{s^2+1} \tag{3'}$$

上式係問題於積分轉換域 s 定義域之解，再引用 *Laplace* 反轉換，可推求出問題於時間域與 t 變數有關之解：

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{y(0)\frac{s}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{y'(0)\frac{1}{s^2+1}\right\} \tag{4}$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$，$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$，$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$。故式(4)可再化簡爲：

$$y(t)=2t-2\sin t+y(0)\cos t+y'(0)\sin t \tag{5}$$

式(5)即爲問題於時間域以 t 表示之解，但其中有兩個未知數 $y(0)$ 與 $y'(0)$ 需想辦法推求其解。解析這兩個未知數，需要題目中之兩個條件，兩個條件剛好夠解出這兩個未知數。式(5)再對 t 微分一次，可知：

$$y'(t)=2-2\cos t-y(0)\sin t+y'(0)\cos t \tag{5'}$$

將兩個條件 $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ 、 $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{2}$ 代入式(5)與式(5’)：

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}=2\left(\frac{\pi}{4}\right)-2\sin\frac{\pi}{4}+y(0)\cos\frac{\pi}{4}+y'(0)\sin\frac{\pi}{4}\\ 2-\sqrt{2}=2-2\cos\frac{\pi}{4}-y(0)\sin\frac{\pi}{4}+y'(0)\cos\frac{\pi}{4}\end{cases} \tag{6}$$

再加以化簡，如以下所示：

$$\begin{cases}0=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ -\sqrt{2}=-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-y(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases} \tag{6'}$$

再整理後，可得：

$$\begin{cases}0=-2+y(0)+y'(0)\\ 0=-y(0)+y'(0)\end{cases} \tag{6''}$$

上式可解出$y(0)=y'(0)=1$，故問題之解爲：

$$\boxed{y(t)=2t-\sin t+\cos t}$$

範例二
試引用 *Laplace* 積分轉換方法，解析以下所示之常微分方程式的解。 $y''+y=5t$ ，$y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ ，$y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{2}$ 。

解答：

將常微分方程式作 *Laplace* 積分轉換，則：

$$L\{y''\}+L\{y\}=L\{5t\} \tag{1}$$

已知$L\{y''\}=s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)$，故式(1)可表爲：

$$s^2L\{y\}-sy(0)-y'(0)+L\{y\}=L\{5t\} \tag{2}$$

這個時候，並沒有辦法決定 $y(0)$ 及 $y'(0)$ 之值，但可將其視爲常數，保留下來。故：

$$\left(s^2+1\right)L\{y\}=L\{5t\}+sy(0)+y'(0) \tag{2'}$$

因爲$L\{t\}=1/s^2$ ，故上式可再改寫爲：

$$L\{y\}=\frac{5}{s^2\left(s^2+1\right)}+y(0)\frac{s}{s^2+1}+y'(0)\frac{1}{s^2+1} \tag{3}$$

上式等號右邊之第一項再拆解爲簡單之部分分式：

$$L\{y\}=\frac{5}{s^2}+\frac{-5}{s^2+1}+y(0)\frac{s}{s^2+1}+y'(0)\frac{1}{s^2+1} \tag{3'}$$

上式係問題於積分轉換域 s 定義域之解，再引用 *Laplace* 反轉換，可推求出問題於時間域與 t 變數有關之解：

$$y(t)=L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{5}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{y(0)\frac{s}{s^2+1}\right\}+L^{-1}\left\{y'(0)\frac{1}{s^2+1}\right\} \tag{4}$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}=t$ ，$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=\sin t$ ，$L^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+1}\right\}=\cos t$ 。故式(4)可再化簡爲：

$$y(t)=5t-5\sin t+y(0)\cos t+y'(0)\sin t \tag{5}$$

式(5)即爲問題於時間域以 t 表示之解，但其中有兩個未知數 $y(0)$ 與 $y'(0)$ 需想辦法推求其解。解析這兩個未知數，需要題目中之兩個條件，兩個條件剛好夠解出這兩個未知數。式(5)再對 t 微分一次，可知：

$$y'(t)=5-5\cos t-y(0)\sin t+y'(0)\cos t \tag{5'}$$

將兩個條件 $y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{2}$ 、 $y'\left(\frac{\pi}{4}\right)=2-\sqrt{2}$ 代入式(5)與式(5’)：

$$\begin{cases}\frac{\pi}{2}=5\left(\frac{\pi}{4}\right)-5\sin\frac{\pi}{4}+y(0)\cos\frac{\pi}{4}+y'(0)\sin\frac{\pi}{4}\\ 2-\sqrt{2}=5-5\cos\frac{\pi}{4}-y(0)\sin\frac{\pi}{4}+y'(0)\cos\frac{\pi}{4}\end{cases} \tag{6}$$

再加以化簡，如以下所示：

$$\begin{cases}-\frac{3\pi}{4}=-5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ -3-\sqrt{2}=-5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-y(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+y'(0)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases} \tag{6'}$$

再整理後，可得：

$$\begin{cases}y(0)+y'(0)=-\frac{3\sqrt{2}}{4}\pi+5\\ -y(0)+y'(0)=-3\sqrt{2}+3\end{cases} \tag{6''}$$

上式可解出$y(0)=1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+1\right)$，$y'(0)=4+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-1\right)$，故問題之解爲：

$$\boxed{y(t)=5t-5\sin t+\left[1+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{4}+1\right)\right]\cos t+\left[4+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi}{4}-1\right)\right]\sin t}$$

表 1　應背下來的 17 個 Laplace 積分轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$