提要 182：應用 *Laplace* 轉換方法解析聯立常微分方程式

以下說明 *Laplace* 積分轉換方法在解析聯立常微分方程式時之應用方式。

範例一
試引用 *Laplace* 積分轉換方法，解析以下所示之聯立常微分方程式的解： $\begin{cases} y_1'' = -ky_1 + k(y_2 - y_1) \\ y_2'' = -k(y_2 - y_1) - ky_2 \end{cases}$ ，$y_1(0)=1$ ，$y_2(0)=1$ ，$y_1'(0)=\sqrt{3k}$ ，$y_2'(0)=-\sqrt{3k}$ 。

解答：

將聯立常微分方程式作 *Laplace* 積分轉換，則：

$$\begin{cases} L\{y_1''\} = L\{-ky_1\} + L\{\,k(y_2 - y_1)\} \\ L\{y_2''\} = L\{-k(y_2 - y_1)\} - L\{\,ky_2\} \end{cases} \tag{1}$$

已知 $L\{\,y''\} = s^2L\{y\} - sy(0) - y'(0)$，故式(1)可表爲：

$$\begin{cases} s^2L\{y_1\} - sy_1(0) - y_1'(0) = -kL\{y_1\} + kL\{y_2\} - kL\{y_1\} \\ s^2L\{y_2\} - sy_2(0) - y_2'(0) = -kL\{y_2\} + kL\{y_1\} - kL\{y_2\} \end{cases} \tag{2}$$

將初使條件代入式(2)：

$$\begin{cases} s^2L\{y_1\} - s(1) - \sqrt{3k} = -2kL\{y_1\} + kL\{y_2\} \\ s^2L\{y_2\} - s(1) - \left(-\sqrt{3k}\right) = kL\{y_1\} - 2kL\{y_2\} \end{cases} \tag{2'}$$

上式可再改寫爲：

$$\begin{cases} \left(s^2 + 2k\right)L\{y_1\} - kL\{y_2\} = s + \sqrt{3k} \\ -kL\{y_1\} + \left(s^2 + 2k\right)L\{y_2\} = s - \sqrt{3k} \end{cases} \tag{2''}$$

上式係呈聯立之代數方程式，解析此聯立代數方程式可知：

$$\begin{cases} L\{y_1\}=\dfrac{s\left(s^2+3k\right)+\sqrt{3k}\left(s^2+k\right)}{\left(s^2+2k\right)^2-k^2} \\ L\{y_2\}=\dfrac{s\left(s^2+3k\right)-\sqrt{3k}\left(s^2+k\right)}{\left(s^2+2k\right)^2-k^2} \end{cases} \tag{3}$$

式(3)可繼續改寫為：

$$\begin{cases} L\{y_1\}=\dfrac{s\left(s^2+3k\right)+\sqrt{3k}\left(s^2+k\right)}{\left(s^2+3k\right)\left(s^2+k\right)}=\dfrac{s}{s^2+k}+\dfrac{\sqrt{3k}}{s^2+3k} \\ L\{y_2\}=\dfrac{s\left(s^2+3k\right)-\sqrt{3k}\left(s^2+k\right)}{\left(s^2+3k\right)\left(s^2+k\right)}=\dfrac{s}{s^2+k}-\dfrac{\sqrt{3k}}{s^2+3k} \end{cases} \tag{3'}$$

上式係問題於積分轉換域 s，以參數 s 表示之解。再對式(3')作 *Laplace* 積分反轉換，即可推求出時間域與變數 t 有關之解：

$$\begin{cases} y_1=L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k}\right\}+L^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right\} \\ y_2=L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k}\right\}-L^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right\} \end{cases} \tag{4}$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+k}\right\}=\cos\left(\sqrt{k}t\right)$，$L^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3k}}{s^2+3k}\right\}=\sin\left(\sqrt{3k}t\right)$。故式(4)可表示為：

$$\boxed{\begin{cases} y_1=\cos\left(\sqrt{k}t\right)+\sin\left(\sqrt{3k}t\right) \\ y_2=\cos\left(\sqrt{k}t\right)-\sin\left(\sqrt{3k}t\right) \end{cases}} \tag{5}$$

式(5)即為問題於時間域以 t 表示之解。

範例二

試引用 *Laplace* 積分轉換方法，解析以下所示之聯立常微分方程式的解：

$$\begin{cases} y_1'' = -y_1 + (y_2 - y_1) \\ y_2'' = -(y_2 - y_1) - y_2 \end{cases}，y_1(0)=1，y_2(0)=1，y_1'(0)=\sqrt{3}，y_2'(0)=-\sqrt{3}。$$

解答：

將聯立常微分方程式作 *Laplace* 積分轉換，則：

$$\begin{cases} L\{y_1''\} = L\{-y_1\} + L\{y_2 - y_1\} \\ L\{y_2''\} = L\{-(y_2 - y_1)\} - L\{y_2\} \end{cases} \tag{1}$$

已知$L\{y''\} = s^2 L\{y\} - sy(0) - y'(0)$，故式(1)可表爲：

$$\begin{cases} s^2 L\{y_1\} - sy_1(0) - y_1'(0) = -L\{y_1\} + L\{y_2\} - L\{y_1\} \\ s^2 L\{y_2\} - sy_2(0) - y_2'(0) = -L\{y_2\} + L\{y_1\} - L\{y_2\} \end{cases} \tag{2}$$

將初使條件代入式(2)：

$$\begin{cases} s^2 L\{y_1\} - s(1) - \sqrt{3} = -2L\{y_1\} + L\{y_2\} \\ s^2 L\{y_2\} - s(1) - (-\sqrt{3}) = L\{y_1\} - 2L\{y_2\} \end{cases} \tag{2'}$$

上式可再改寫爲：

$$\begin{cases} (s^2+2) L\{y_1\} - L\{y_2\} = s + \sqrt{3} \\ -L\{y_1\} + (s^2+2) L\{y_2\} = s - \sqrt{3} \end{cases} \tag{2''}$$

上式係呈聯立之代數方程式，解析此聯立代數方程式可知：

$$\begin{cases} L\{y_1\} = \dfrac{s(s^2+3) + \sqrt{3}(s^2+1)}{(s^2+2)^2 - 1} \\ L\{y_2\} = \dfrac{s(s^2+3) - \sqrt{3}(s^2+1)}{(s^2+2)^2 - 1} \end{cases} \tag{3}$$

式(3)可繼續改寫爲：

$$\begin{cases} L\{y_1\} = \dfrac{s\left(s^2+3\right)+\sqrt{3}\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+3\right)\left(s^2+1\right)} = \dfrac{s}{s^2+1}+\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+3} \\ L\{y_2\} = \dfrac{s\left(s^2+3\right)-\sqrt{3}\left(s^2+1\right)}{\left(s^2+3\right)\left(s^2+1\right)} = \dfrac{s}{s^2+1}-\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+3} \end{cases} \tag{3'}$$

上式係問題於積分轉換域 s，以參數 s 表示之解。再對式(3')作 *Laplace* 積分反轉換，即可推求出時間域與變數 t 有關之解：

$$\begin{cases} y_1 = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} + L^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right\} \\ y_2 = L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} - L^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right\} \end{cases} \tag{4}$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+1}\right\} = \cos t$ ，$L^{-1}\left\{\dfrac{\sqrt{3}}{s^2+3}\right\} = \sin\left(\sqrt{3}t\right)$ 。故式(4)可表示為：

$$\boxed{\begin{cases} y_1 = \cos t + \sin\left(\sqrt{3}t\right) \\ y_2 = \cos t - \sin\left(\sqrt{3}t\right) \end{cases}} \tag{5}$$

式(5)即為問題於時間域以 t 表示之解。

表 1　應背下來的 17 個 *Laplace* 積分轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$