提要 181：函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式的應用

首先於範例一說明函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換過程與結果，然後於範例二與範例三說明 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式的應用。

範例一
試說明函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$，亦即：

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt &= \int_0^\infty e^{-st}\,d\left[f^{(n-1)}(t)\right] \\
&= \left[e^{-st}f^{(n-1)}(t)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^\infty f^{(n-1)}(t)\,d\left(e^{-st}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f^{(n-1)}(t)\right] - \left[e^{-st}f^{(n-1)}(t)\right]_{t=0} - \int_0^\infty f^{(n-1)}(t)\left(-se^{-st}dt\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{f^{(n-1)}(t)}{e^{st}}\right] - \left[e^{-s(0)}f^{(n-1)}(0)\right] + s\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

因爲 $f^{(n-1)}(\infty)$ 爲有限值，又當 $s>0$ 時，$e^{s(\infty)}\to\infty$，故 $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f^{(n-1)}(t)}{e^{st}}\right]$。基於此，上式可改寫爲：

$$
\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-st}dt - f^{(n-1)}(0) = sL\left\{f^{(n-1)}(t)\right\} - f^{(n-1)}(0)
$$

同理 $\int_0^\infty f^{(n-1)}(t)e^{-st}dt = sL\left\{f^{(n-2)}(t)\right\} - f^{(n-2)}(0)$，故：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt &= sL\left\{f^{(n-1)}(t)\right\}-f^{(n-1)}(0)\\ &= s\left[sL\left\{f^{(n-2)}(t)\right\}-f^{(n-2)}(0)\right]-f^{(n-1)}(0)\\ &= s^2L\left\{f^{(n-2)}(t)\right\}-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

其中$L\left\{f^{(n-2)}(t)\right\}=sL\left\{f^{(n-3)}(t)\right\}-f^{(n-3)}(0)$，故：

$$\begin{aligned}\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt &= s^2L\left\{f^{(n-2)}(t)\right\}-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\\ &= s^2\left[sL\left\{f^{(n-3)}(t)\right\}-f^{(n-3)}(0)\right]-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\\ &= s^3L\left\{f^{(n-3)}(t)\right\}-s^2f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

依此原則，可繼續以下之推導：

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-st}dt\\ &= s^3L\left\{f^{(n-3)}(t)\right\}-s^2f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\\ &= s^3\left[sL\left\{f^{(n-4)}(t)\right\}-f^{(n-4)}(0)\right]-s^2f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\\ &= s^4L\left\{f^{(n-4)}(t)\right\}-s^3f^{(n-4)}(0)-s^2f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\\ &= s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-s^3f^{(n-4)}(0)-s^2f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)\end{aligned}$$

因此$f^{(n)}(t)$之 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{f^{(n)}(t)\right\}=s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-s^3f^{(n-4)}(0)-s^2f^{(n-3)}(0)-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)}$$

範例二
試引用函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式，解析以下所示之常微分方程式： $y'''' - k^4 y = 0$ ， $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$ ， $y'''(0) = 1$ 。

解答：

因本題牽涉四次微分之函數的 *Laplace* 轉換，故應先建立 $L\{f^{(4)}(t)\}$ 的結果。引用範例一之廣義公式，可知：

$$L\{f^{(4)}(t)\} = s^4 L\{f(t)\} - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0) \tag{1}$$

現在，再對此常微分方程式作 *Laplace* 積分轉換：

$$\int_0^\infty \{y^{(4)} - k^4 y\} e^{-st} dt = \int_0^\infty (0) e^{-st} dt \tag{2}$$

上式可改寫爲：

$$\int_0^\infty y^{(4)} e^{-st} dt - \int_0^\infty k^4 y\, e^{-st} dt = 0 \tag{2'}$$

由式(1)知：

$$L\{y^{(4)}(t)\} = s^4 L\{y(t)\} - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0) \tag{3}$$

故式(3)可改寫爲：

$$L\{y^{(4)}(t)\} = s^4 L\{y(t)\} - 1 \tag{4}$$

將式(4)代入式(2)，則：

$$(s^4 - k^4) \int_0^\infty y\, e^{-st} dt - 1 = 0$$

故：

$$Y(s) = \int_0^\infty y\, e^{-st} dt = \frac{1}{s^4 - k^4} \tag{5}$$

再推求其 *Laplace* 反轉換。首先將式(5)拆解成簡單之部分分式，再利用表 1 中所示之 17 個 *Laplace* 積分轉換公式中的部分公式，即可解析出問題之解。利用觀察法，可將式(5)以簡單之部分分式加以表示：

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{1}{s^4 - k^4} \\
&= \frac{1}{(s^2 - k^2)(s^2 + k^2)} \\
&= \frac{1}{2k^2}\left(\frac{1}{s^2 - k^2} + \frac{-1}{s^2 + k^2}\right) \\
&= \frac{1}{2k^3}\left(\frac{k}{s^2 - k^2} - \frac{k}{s^2 + k^2}\right)
\end{aligned}$$

上式再進行 *Laplace* 積分反轉換：

$$\begin{aligned}
y(t) &= L^{-1}\{Y(s)\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{1}{2k^3}\left(\frac{k}{s^2 - k^2} - \frac{k}{s^2 + k^2}\right)\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{1}{2k^3}\frac{k}{s^2 - k^2}\right\} - L^{-1}\left\{\frac{1}{2k^3}\frac{k}{s^2 + k^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2k^3}L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 - k^2}\right\} - \frac{1}{2k^3}L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2 + k^2}\right\}
\end{aligned}$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 - a^2}\right\} = \sinh(at)$，$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} = \sin(at)$，故上式又可表爲：

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{2k^3}\sinh(kt) - \frac{1}{2k^3}\sin(kt)} \tag{6}$$

式(6)即爲問題之解。

範例三
試引用函數 $f^{(n)}(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式，解析以下所示之常微分方程式： $y'''' - k^4 y = 0$，$y(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$，$y'(0) = 1$。

解答：

因本題牽涉四次微分之函數的 *Laplace* 轉換，故應先建立 $L\{f^{(4)}(t)\}$ 的結果。引用範例一之廣義公式，可知：

$$L\{f^{(4)}(t)\} = s^4 L\{f(t)\} - s^3 f(0) - s^2 f'(0) - sf''(0) - f'''(0) \tag{1}$$

現在，再對此常微分方程式作 *Laplace* 積分轉換：

$$\int_0^\infty \{y^{(4)} - k^4 y\} e^{-st} dt = \int_0^\infty (0) e^{-st} dt \tag{2}$$

上式可改寫為：

$$\int_0^\infty y^{(4)} e^{-st} dt - \int_0^\infty k^4 y\, e^{-st} dt = 0 \tag{2'}$$

由式(1)知：

$$L\{y^{(4)}(t)\} = s^4 L\{y(t)\} - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - sy''(0) - y'''(0) \tag{3}$$

故式(3)可改寫為：

$$L\{y^{(4)}(t)\} = s^4 L\{y(t)\} - s^2 \tag{4}$$

將式(4)代入式(2)，則：

$$(s^4 - k^4) \int_0^\infty y\, e^{-st} dt - s^2 = 0$$

故：

$$Y(s) = \int_0^\infty y\, e^{-st} dt = \frac{s^2}{s^4 - k^4} \tag{5}$$

再推求其 *Laplace* 反轉換。首先將式(5)拆解成簡單之部分分式，再利用表 1 中所示之 17 個 *Laplace* 積分轉換公式中的部分公式，即可解析出問題之解。利用觀察法，可將式(5)以簡單之部分分式加以表示：

$$
\begin{aligned}
Y(s) &= \frac{s^2}{s^4-k^4} \\
&= \frac{s^2}{\left(s^2-k^2\right)\left(s^2+k^2\right)} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-k^2}+\frac{1}{s^2+k^2}\right) \\
&= \frac{1}{2k}\left(\frac{k}{s^2-k^2}+\frac{k}{s^2+k^2}\right)
\end{aligned}
$$

上式再進行 *Laplace* 積分反轉換：

$$
\begin{aligned}
y(t) &= L^{-1}\left\{Y(s)\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{1}{2k}\left(\frac{k}{s^2-k^2}+\frac{k}{s^2+k^2}\right)\right\} \\
&= L^{-1}\left\{\frac{1}{2k}\frac{k}{s^2-k^2}\right\}+L^{-1}\left\{\frac{1}{2k}\frac{k}{s^2+k^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2k}L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2-k^2}\right\}+\frac{1}{2k}L^{-1}\left\{\frac{k}{s^2+k^2}\right\}
\end{aligned}
$$

由表 1 知，$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2-a^2}\right\}=\sinh(at)$，$L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin(at)$，故上式又可表爲：

$$
\boxed{y(t)=\frac{1}{2k}\sinh(kt)+\frac{1}{2k}\sin(kt)} \tag{6}
$$

式(6)即爲問題之解。

表 1　應背下來的 17 個 *Laplace* 積分轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$1/s$
t	$1/s^2$
t^2	$2/s^3$
t^n	$n!/s^{n+1}$
e^{at}	$1/(s-a)$
$\cosh(at)$	$s/(s^2-a^2)$
$\sinh(at)$	$a/(s^2-a^2)$
$\cos(at)$	$s/(s^2+a^2)$
$\sin(at)$	$a/(s^2+a^2)$
$f'(t)$	$sL\{f(t)\}-f(0)$
$f''(t)$	$s^2L\{f(t)\}-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nL\{f(t)\}-s^{n-1}f(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$
$u(t-a)$	e^{-as}/s
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$