提要 180：函數 *f'(t)*與 *f"(t)*之 *Laplace* 積分轉換公式的應用

首先於範例一與範例二說明函數 $f'(t)$ 與 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換過程與結果，然後於範例三至範例十說明 $f'(t)$ 與 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式的應用。

範例一
試說明函數 $f'(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表為 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, d[f(t)] \\
&= \left[e^{-st} f(t)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^{\infty} f(t)\, d\left(e^{-st}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st} f(t)\right] - \left[e^{-st} f(t)\right]_{t=0} - \int_0^{\infty} f(t)\left(-se^{-st}dt\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{f(t)}{e^{st}}\right] - \left[e^{-s(0)} f(0)\right] + s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

因為 $f(\infty)$ 為有限值，又當 $s>0$ 時， $e^{s(\infty)}\to\infty$ ，故 $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f(t)}{e^{st}}\right]\to 0$ 。基於此，上式可改寫為：

$$
\boxed{\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)}
$$

上式即為 $f'(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果。

範例二

試說明函數 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換的過程與結果。

解答：

由定義知函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可表爲 $F(s)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$ ，亦即：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f''(t)e^{-st}dt &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, d[f'(t)] \\
&= \left[e^{-st}f'(t)\right]_{t=0}^{t\to\infty} - \int_0^{\infty} f'(t)d\left(e^{-st}\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[e^{-st}f'(t)\right] - \left[e^{-st}f'(t)\right]_{t=0} - \int_0^{\infty} f'(t)\left(-se^{-st}dt\right) \\
&= \lim_{t\to\infty}\left[\frac{f'(t)}{e^{st}}\right] - \left[e^{-s(0)}f'(0)\right] + s\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt
\end{aligned}$$

因爲 $f'(\infty)$ 爲有限值，又當 $s>0$ 時，$e^{s(\infty)}\to\infty$ ，故 $\lim_{t\to\infty}\left[\frac{f'(t)}{e^{st}}\right]\to 0$ 。基於此，上式可改寫爲：

$$\int_0^{\infty} f''(t)e^{-st}dt = s\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt - f'(0) = sL\{f'(t)\} - f'(0)$$

已知 $\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt = sL\{f(t)\} - f(0)$ ，故：

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f''(t)e^{-st}dt &= s\int_0^{\infty} f'(t)e^{-st}dt - f'(0) \\
&= s\left[s\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - f(0)\right] - f'(0) \\
&= s^2\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}$$

因此 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{\int_0^{\infty} f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0)}$$

範例三
試引用函數 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式，推導出 t^2 之 *Laplace* 積分轉換結果。

解答：

已知 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式為：

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0) \tag{1}$$

茲考慮：

$$f(t) = t^2 \tag{2}$$

則：

$$f'(t) = 2t \text{ ， } f''(t) = 2 \text{ ， } f(0) = 0 \text{ ， } f'(0) = 0 \tag{3}$$

將式(3)代回式(1)，則：

$$\int_0^\infty (2)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty (t^2)e^{-st}dt - s(0) - (0) \tag{4}$$

亦即：

$$L\{2\} = s^2 L\{t^2\}$$

已知 $L\{2\} = 2L\{1\} = 2(1/s) = 2/s$ ，故：

$$\frac{2}{s} = s^2 L\{t^2\}$$

因此：

$$\boxed{L\{t^2\} = \frac{2}{s^3}}$$

範例四

試引用函數 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式，推導出 $\sin(at)$ 與 $\cos(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果。

解答：

❶ $\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換

已知 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式為：

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0) \tag{1}$$

茲考慮：

$$f(t) = \sin(at) \tag{2}$$

則：

$$f'(t) = a\cos(at) \text{，} f''(t) = -a^2\sin(at) \text{，} f(0) = \sin 0 = 0 \text{，} f'(0) = a\cos 0 = a \tag{3}$$

將式(3)代回式(1)，則：

$$\int_0^\infty \left[-a^2\sin(at)\right]e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt - s(0) - a \tag{4}$$

亦即：

$$-a^2\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt - a$$

合併同類項後可得：

$$a = \left(s^2 + a^2\right)\int_0^\infty \sin(at)e^{-st}dt$$

故式(4)可改寫為：

$$\int_0^{\infty} \sin(at) e^{-st} dt = \frac{a}{s^2 + a^2}$$

因此，$\sin(at)$之 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\boxed{L\{\sin(at)\} = \frac{a}{s^2 + a^2}} \tag{5}$$

❷ cos(*at*)之 *Laplace* 積分轉換

已知 $f''(t)$之 *Laplace* 積分轉換公式為：

$$\int_0^{\infty} f''(t) e^{-st} dt = s^2 \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt - sf(0) - f'(0) \tag{6}$$

茲考慮：

$$f(t) = \cos(at) \tag{7}$$

則：

$$f'(t) = -a\sin(at) \text{，} f''(t) = -a^2 \cos(at) \text{，} f(0) = \cos 0 = 1 \text{，} f'(0) = -a\sin 0 = 0 \tag{8}$$

將式(8)代回式(6)，則：

$$\int_0^{\infty} [-a^2 \cos(at)] e^{-st} dt = s^2 \int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt - s(1) - 0 \tag{9}$$

亦即：

$$-a^2 \int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt = s^2 \int_0^{\infty} \cos(at) e^{-st} dt - s$$

合併同類項後可得：

$$s=\left(s^2+a^2\right)\int_0^\infty \cos\left(at\right)e^{-st}dt$$

故式(4)可改寫爲：

$$\int_0^\infty \cos\left(at\right)e^{-st}dt=\frac{s}{s^2+a^2}$$

因此，$\cos\left(at\right)$之 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{\cos\left(at\right)\right\}=\frac{a}{s^2+a^2}} \tag{10}$$

範例五

試引用函數 $f'(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式，推導出 $\sin^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果。

解答：

已知 $f'(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式爲：

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) \tag{1}$$

茲考慮：

$$f(t) = \sin^2 t \tag{2}$$

則：

$$f'(t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t) \text{，} f(0) = \sin^2 0 = 0 \tag{3}$$

將式(3)代回式(1)，則：

$$\int_0^\infty \sin(2t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty (\sin^2 t)e^{-st}dt - (0) \tag{4}$$

已知：

$$\int_0^\infty \sin(2t)e^{-st}dt = \frac{2}{s^2+2^2}$$

故式(4)可改寫爲：

$$s\int_0^\infty (\sin^2 t)e^{-st}dt = \frac{2}{s^2+2^2}$$

因此，$\sin^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果爲：

$$\boxed{L\left\{\sin^2 t\right\} = \frac{2}{s\left(s^2+4\right)}} \tag{5}$$

範例六
試求函數 $\cos^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\left\{f'(t)\right\} = sL\left\{f(t)\right\} - f(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = \cos^2 t$$

則 $f'(t) = -2\sin t\cos t = -\sin 2t$ ，且 $f(0) = \cos^2 0 = 1$ ，代回式(1)：

$$L\{-2\sin t\cos t\} = sL\left\{\cos^2 t\right\} - \cos^2 0$$
$$\Rightarrow\ -L\left\{\sin 2t\right\} = sL\left\{\cos^2 t\right\} - 1$$
$$\Rightarrow\ -\frac{2}{s^2+2^2} + 1 = sL\left\{\cos^2 t\right\}$$
$$\Rightarrow\ sL\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{-2+s^2+4}{s^2+4}$$
$$\Rightarrow\ sL\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{s^2+2}{s^2+4}$$
$$\Rightarrow\ L\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{2\left(s^2+2\right)}{s\left(s^2+4\right)}$$

故函數 $\cos^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果爲 $\boxed{L\left\{\cos^2 t\right\} = \frac{2\left(s^2+2\right)}{s\left(s^2+4\right)}}$ 。

範例七
試求函數$\sinh^2 t$之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\{f'(t)\} = sL\{f(t)\} - f(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = \sinh^2 t$$

則

$$f'(t) = 2\sinh t\cosh t = 2\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh(2t)$$

且$f(0) = \sinh^2 0 = 0$，代回式(1)：

$$L\{2\sinh t\cosh t\} = sL\{\sinh^2 t\} - \sinh^2 0$$
$$\Rightarrow\ L\{\sinh 2t\} = sL\{\sinh^2 t\} - 0$$
$$\Rightarrow\ \frac{2}{s^2 - 2^2} = sL\{\sinh^2 t\}$$
$$\Rightarrow\ L\{\sinh^2 t\} = \frac{2}{s(s^2 - 4)}$$

故函數$\sinh^2 t$之 *Laplace* 積分轉換結果爲$\boxed{L\{\sinh^2 t\} = \frac{2}{s(s^2 - 4)}}$。

範例八

試求函數 $\cosh^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - f(0) = sL\{f(t)\} - f(0)$$

即

$$L\left\{f'(t)\right\} = sL\left\{f(t)\right\} - f(0) \qquad (1)$$

今考慮

$$f(t) = \cosh^2 t$$

則

$$f'(t) = 2\cosh t \sinh t = 2\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)\left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right) = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \sinh(2t)$$

且 $f(0) = \cosh^2 0 = 1$，代回式(1)：

$$L\{2\sinh t \cosh t\} = sL\left\{\cosh^2 t\right\} - \cosh^2 0$$

$$\Rightarrow\ L\{\sinh 2t\} = sL\left\{\cosh^2 t\right\} - 1$$

$$\Rightarrow\ \frac{2}{s^2 - 2^2} + 1 = sL\left\{\cosh^2 t\right\}$$

$$\Rightarrow\ sL\left\{\cosh^2 t\right\} = \frac{s^2 - 2}{s^2 - 4}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{\cosh^2 t\right\} = \frac{s^2 - 2}{s\left(s^2 - 4\right)}$$

故函數 $\cosh^2 t$ 之 *Laplace* 積分轉換結果爲 $\boxed{L\left\{\cosh^2 t\right\} = \frac{s^2 - 2}{s\left(s^2 - 4\right)}}$。

範例九

試引用函數 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式，推導出 $t\sin(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換結果。

解答：

已知 $f''(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換公式爲：

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0) \tag{1}$$

茲考慮：

$$f(t) = t\sin(at) \tag{2}$$

則：

$$f'(t) = \sin(at) + at\cos(at)\text{，}\ f''(t) = 2a\cos(at) - a^2 t\sin(at)\text{，}\ f(0) = 0\text{，}\ f'(0) = 0 \tag{3}$$

將式(3)代回式(1)，則：

$$\int_0^\infty \left[2a\cos(at) - a^2 t\sin(at)\right]e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty \left[t\sin(at)\right]e^{-st}dt - s(0) - 0 \tag{4}$$

亦即：

$$2a\int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt - a^2\int_0^\infty \left[t\sin(at)\right]e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty \left[t\sin(at)\right]e^{-st}dt$$

合併同類項後可得：

$$2a\int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt = \left(s^2 + a^2\right)\int_0^\infty \left[t\sin(at)\right]e^{-st}dt$$

其中 $\int_0^\infty \cos(at)e^{-st}dt = \dfrac{s}{s^2 + a^2}$，故式(4)可改寫爲：

$$\frac{2as}{s^2+a^2}=\left(s^2+a^2\right)\int_0^\infty \left[t\sin(at)\right]e^{-st}dt$$

因此，$t\sin(at)$之 *Laplace* 積分轉換結果為：

$$\boxed{L\{t\sin(at)\}=\frac{2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}} \tag{5}$$

範例十
試求函數 $t\cos(at)$ 之 *Laplace* 積分轉換的結果。

解答：

已知

$$\int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt - sf(0) - f'(0)$$

即

$$L\{f''(t)\} = s^2 L\{f(t)\} - sf(0) - f'(0) \tag{1}$$

今考慮

$$f(t) = t\cos(at)$$

則

$$f'(t) = \cos(at) - at\sin(at)$$
$$f''(t) = -2a\sin(at) - a^2 t\cos(at)$$

且 $f(0) = (0)\cos(0) = 0$ ， $f'(0) = \cos(0) - a(0)\sin(0) = 1$ ，代回式(1)：

$$L\{-2a\sin(at) - a^2 t\cos(at)\} = s^2 L\{t\cos(at)\} - s(0) - 1$$
$$\Rightarrow\ -2aL\{\sin(at)\} - a^2 L\{t\cos(at)\} = s^2 L\{t\cos(at)\} - 1$$
$$\Rightarrow\ -2aL\{\sin(at)\} + 1 = (s^2 + a^2)L\{t\cos(at)\}$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2)L\{t\cos(at)\} = -2a\left(\frac{a}{s^2 + a^2}\right) + 1$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2)L\{t\cos(at)\} = -\frac{2a^2}{s^2 + a^2} + 1$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2)L\{t\cos(at)\} = \frac{-2a^2 + s^2 + a^2}{s^2 + a^2}$$
$$\Rightarrow\ (s^2 + a^2)L\{t\cos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{s^2 + a^2}$$
$$\Rightarrow\ L\{t\cos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2}$$

故函數$t\cos(at)$之*Laplace*積分轉換結果爲$\boxed{L\{t\cos(at)\}=\frac{s^2-a^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}}$。