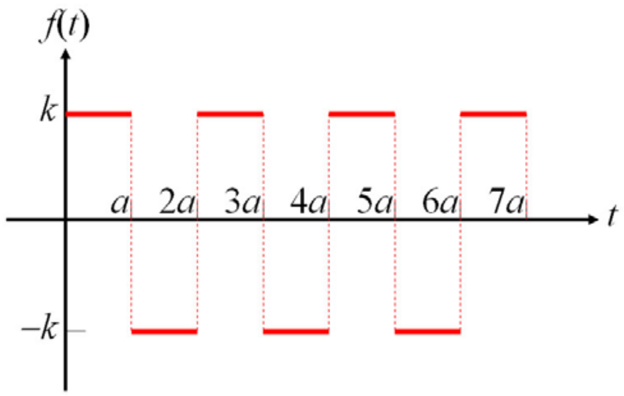
提要 179：週期為 p 之函數 $f(t)$的 *Laplace* 積分轉換的應用

範例一
試求出如圖所示週期函數 $f(t)$的 *Laplace* 積分轉換結果。



解答：

已知週期為 p 之函數 $f(t)$的 *Laplace* 積分轉換定理如以下所示：

定理：週期函數之 *Laplace* 轉換 (Theorem: *Laplace Transform of Periodic Functions*)
若函數 $f(t)$之週期為 p，則其 *Laplace* 積分轉換結果為： $L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p f(t)e^{-st}dt$

雖然可以直接套用公式，但是筆者覺得不應直接引用公式，而應將公式忘掉，但是要記住公式之推導過程，然後由定義解題。根據定義，函數 $f(t)$作 *Laplace* 積分轉換為：

$$\begin{aligned}L\{f(t)\}&=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\\&=\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt+\int_{2a}^{4a} f(t)e^{-st}dt+\int_{4a}^{6a} f(t)e^{-st}dt+\cdots\end{aligned}$$

其中積分式 $\int_{2a}^{4a} f(t)e^{-st}dt$ 可作適當之變數變換，將積分範圍由 $[2a,4a]$ 改寫為 $[0,2a]$。此一變數變換係令：

$$t = T + 2a$$

因此，當 $t = 2a$ 時，$T = 0$；當 $t = 4a$ 時，$T = 2a$；而 $dt = d(T + 2a) = dT + d(2a) = dT + 0 = dT$。因此，$\int_{2a}^{4a} f(t)e^{-st}dt$ 可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_{2a}^{4a} f(t)e^{-st}dt &= \int_0^{2a} f(T+2a)e^{-s(T+2a)}dT \\ &= e^{-2as}\int_0^{2a} f(T+2a)e^{-sT}dT\end{aligned}$$

同理，積分式 $\int_{4a}^{6a} f(t)e^{-st}dt$ 亦應作適當之變數變換，將積分範圍由 $[4a,6a]$ 改寫爲 $[0,2a]$。此一變數變換係令：

$$t = T + 4a$$

則當 $t = 4a$ 時，$T = 0$；當 $t = 6a$ 時，$T = 2a$；而 $dt = d(T + 4a) = dT + d(4a) = dT + 0 = dT$。因此，$\int_{4a}^{6a} f(t)e^{-st}dt$ 可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_{4a}^{6a} f(t)e^{-st}dt &= \int_0^{2a} f(T+4a)e^{-s(T+4a)}dT \\ &= e^{-4as}\int_0^{2a} f(T+4a)e^{-sT}dT\end{aligned}$$

基於此，函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可改寫爲：

$$L\{f(t)\} = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt + e^{-2as}\int_0^{2a} f(T+2a)e^{-sT}dT + e^{-4as}\int_0^{2a} f(T+4a)e^{-sT}dT + \cdots$$

當積分式中有固定之上下限時，更換積分變數之符號並不會改變積分結果，故：

$$\int_0^{2a} f(T+2a)e^{-sT}dT \equiv \int_0^{2a} f(t+2a)e^{-st}dt \text{，}$$
$$\int_0^{2a} f(T+4a)e^{-sT}dT \equiv \int_0^{2a} f(t+4a)e^{-st}dt$$

又因爲 $f(t)$ 係週期爲 $2a$ 之函數，所以：

$$f(t) = f(t+2a) = f(t+4a) = \cdots$$

因此，函數 $f(t)$ 之 *Laplace* 積分轉換可再調整爲：

$$L\{f(t)\} = \int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt + e^{-2as}\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt + e^{-4as}\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt + \cdots$$

上式提出同類項後，可得：

$$L\{f(t)\} = \left(1 + e^{-2as} + e^{-4as} + \cdots\right)\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt$$

其中等比級數$1 + e^{-2as} + e^{-4as} + \cdots$之值爲$1/\left(1 - e^{-2as}\right)$，故函數 $f(t)$之 Laplace 積分轉換可整理爲：

$$L\{f(t)\} = \frac{1}{1 - e^{-2as}}\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt$$

現在，再來討論$\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt$之積分結果，其結果如以下所示：

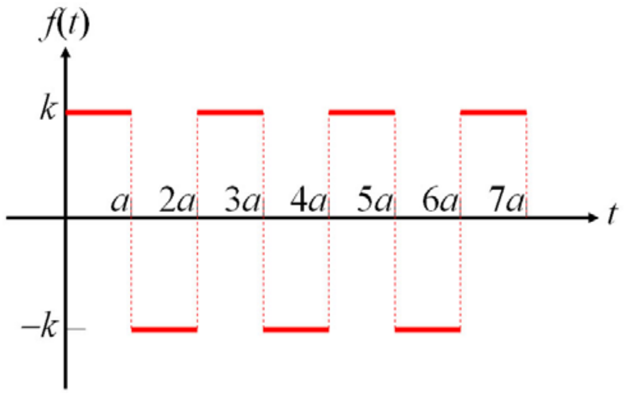
$$\begin{aligned}
\int_0^{2a} f(t)e^{-st}dt &= \int_0^{a} f(t)e^{-st}dt + \int_a^{2a} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^{a} (k)e^{-st}dt + \int_a^{2a} (-k)e^{-st}dt \\
&= k\int_0^{a} e^{-st}dt - k\int_a^{2a} e^{-st}dt \\
&= k\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^a - k\left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_a^{2a} \\
&= k\left[-\frac{e^{-as}}{s} + \frac{e^{0}}{s}\right] - k\left[-\frac{e^{-2as}}{s} + \frac{e^{-as}}{s}\right] \\
&= k\left[-\frac{2e^{-as}}{s} + \frac{e^{-2as}}{s} + \frac{1}{s}\right] \\
&= \frac{k}{s}\left(-2e^{-as} + e^{-2as} + 1\right) \\
&= \frac{k}{s}\left(e^{-2as} - 2e^{-as} + 1\right) \\
&= \frac{k}{s}\left[\left(e^{-as}\right)^2 - 2e^{-as} + 1\right] \\
&= \frac{k}{s}\left(e^{-as} - 1\right)^2
\end{aligned}$$

故函數 $f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可表爲：

$$
\begin{aligned}
L\{f(t)\} &= \frac{1}{1-e^{-2as}}\frac{k}{s}\left(e^{-as}-1\right)^2 \\
&= \frac{k}{s}\frac{\left(e^{-as}-1\right)^2}{1-e^{-2as}} \\
&= \frac{k}{s}\frac{\left(e^{-as}-1\right)^2}{1-\left(e^{-as}\right)^2} \\
&= \frac{k}{s}\frac{\left(1-e^{-as}\right)^2}{\left(1-e^{-as}\right)\left(1+e^{-as}\right)} \\
&= \frac{k}{s}\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}
\end{aligned}
$$

亦即：

$$
\boxed{L\{f(t)\} = \frac{k}{s}\frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}}}
$$

範例二
今考慮$a=1$、$k=1$，試求出如圖所示週期函數 $f(t)$的 *Laplace* 積分轉換結果。 

解答：

已知週期爲 p 之函數 $f(t)$的 *Laplace* 積分轉換定理如以下所示：

定理：週期函數之 *Laplace* 轉換 (Theorem: *Laplace Transform of Periodic Functions*)
若函數 $f(t)$之週期爲 p，則其 *Laplace* 積分轉換結果爲： $L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p f(t)e^{-st}dt$

雖然可以直接套用公式，但是筆者覺得不應直接引用公式，而應將公式忘掉，但是要記住公式之推導過程，然後由定義解題。根據定義，函數 $f(t)$作 *Laplace* 積分轉換爲：

$$\begin{aligned}L\{f(t)\}&=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\\&=\int_0^2 f(t)e^{-st}dt+\int_2^4 f(t)e^{-st}dt+\int_4^6 f(t)e^{-st}dt+\cdots\end{aligned}$$

其中積分式 $\int_2^4 f(t)e^{-st}dt$ 可作適當之變數變換，將積分範圍由 $[2,4]$ 改寫爲 $[0,2]$。此一變數變換係令：

$$t=T+2$$

因此，當 $t=2$ 時，$T=0$；當 $t=4$ 時，$T=2$；而 $dt=d(T+2)=dT+d(2)=dT+0=dT$。因此，$\int_2^4 f(t)e^{-st}dt$ 可改寫爲：

$$\int_2^4 f(t)e^{-st}dt = \int_0^2 f(T+2)e^{-s(T+2)}dT$$
$$= e^{-2s}\int_0^2 f(T+2)e^{-sT}dT$$

同理，積分式$\int_4^6 f(t)e^{-st}dt$亦應作適當之變數變換，將積分範圍由$[4,6]$改寫爲$[0,2]$。此一變數變換係令：

$$t = T+4$$

則當$t=4$時，$T=0$；當$t=6$時，$T=2$；而$dt = d(T+4) = dT + d(4) = dT + 0 = dT$。因此，$\int_4^6 f(t)e^{-st}dt$可改寫爲：

$$\int_4^6 f(t)e^{-st}dt = \int_0^2 f(T+4)e^{-s(T+4)}dT$$
$$= e^{-4s}\int_0^2 f(T+4)e^{-sT}dT$$

基於此，函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可改寫爲：

$$L\{f(t)\} = \int_0^2 f(t)e^{-st}dt + e^{-2s}\int_0^2 f(T+2)e^{-sT}dT + e^{-4s}\int_0^2 f(T+4)e^{-sT}dT + \cdots$$

當積分式中有固定之上下限時，更換積分變數之符號並不會改變積分結果，故：

$$\int_0^2 f(T+2)e^{-sT}dT \equiv \int_0^2 f(t+2)e^{-st}dt \text{ ，} \int_0^2 f(T+4)e^{-sT}dT \equiv \int_0^2 f(t+4)e^{-st}dt$$

又因爲$f(t)$係週期爲 2 之函數，所以：

$$f(t) = f(t+2) = f(t+4) = \cdots$$

因此，函數$f(t)$之 *Laplace* 積分轉換可再調整爲：

$$L\{f(t)\} = \int_0^2 f(t)e^{-st}dt + e^{-2s}\int_0^2 f(t)e^{-st}dt + e^{-4s}\int_0^2 f(t)e^{-st}dt + \cdots$$

上式提出同類項後，可得：

$$L\{f(t)\} = \left(1 + e^{-2s} + e^{-4s} + \cdots\right)\int_0^2 f(t)e^{-st}dt$$

其中等比級數$1 + e^{-2s} + e^{-4s} + \cdots$之值爲$1\big/\left(1-e^{-2s}\right)$，故函數$f(t)$之 Laplace 積分轉

換可整理爲：

$$L\left\{ f\left(t\right)\right\} = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 f\left(t\right)e^{-st}dt$$

現在，再來討論$\int_0^2 f\left(t\right)e^{-st}dt$之積分結果，其結果如以下所示：

$$\begin{aligned}
\int_0^2 f\left(t\right)e^{-st}dt &= \int_0^1 f\left(t\right)e^{-st}dt + \int_1^2 f\left(t\right)e^{-st}dt \\
&= \int_0^1 \left(1\right)e^{-st}dt + \int_1^2 \left(-1\right)e^{-st}dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt \\
&= \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_0^1 - \left[-\frac{e^{-st}}{s}\right]_1^2 \\
&= \left[-\frac{e^{-s}}{s} + \frac{e^{0}}{s}\right] - \left[-\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-s}}{s}\right] \\
&= -\frac{2e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s}}{s} + \frac{1}{s} \\
&= \frac{1}{s}\left(-2e^{-s} + e^{-2s} + 1\right) \\
&= \frac{1}{s}\left(e^{-2s} - 2e^{-s} + 1\right) \\
&= \frac{1}{s}\left[\left(e^{-s}\right)^2 - 2e^{-s} + 1\right] \\
&= \frac{1}{s}\left(e^{-s} - 1\right)^2
\end{aligned}$$

故函數$f\left(t\right)$之 *Laplace* 積分轉換可表爲：

$$\begin{aligned}
L\left\{ f\left(t\right)\right\} &= \frac{1}{1-e^{-2s}}\frac{1}{s}\left(e^{-s} - 1\right)^2 \\
&= \frac{1}{s}\frac{\left(e^{-s} - 1\right)^2}{1-e^{-2s}} \\
&= \frac{1}{s}\frac{\left(e^{-s} - 1\right)^2}{1-\left(e^{-s}\right)^2} \\
&= \frac{1}{s}\frac{\left(1-e^{-s}\right)^2}{\left(1-e^{-s}\right)\left(1+e^{-s}\right)} \\
&= \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}
\end{aligned}$$

亦即：

$$\boxed{L\left\{f\left(t\right)\right\}=\frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}}$$