提要 178：週期為 *p* 之函數 *f*(*t*)的 *Laplace* 積分轉換

定理：週期函數之 *Laplace* 轉換 (Theorem: *Laplace Transform of Periodic Functions*)
若函數 $f(t)$之週期爲 p，則其 *Laplace* 積分轉換結果爲： $L\{f(t)\}=\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\int_0^p f(t)e^{-st}dt$

證明：

根據定義，函數 $f(t)$作 *Laplace* 積分轉換爲：

$$L\{f(t)\}=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^p f(t)e^{-st}dt+\int_p^{2p} f(t)e^{-st}dt+\int_{2p}^{3p} f(t)e^{-st}dt+\cdots \tag{1}$$

其中積分式$\int_p^{2p} f(t)e^{-st}dt$ 可作適當之變數變換，將積分範圍由$[p,2p]$改寫爲$[0,p]$。此一變數變換係令：

$$t=T+p$$

則當$t=p$時，$T=0$；當$t=2p$時，$T=p$；而$dt=d(T+p)=dT+dp=dT+0=dT$。因此，$\int_p^{2p} f(t)e^{-st}dt$ 可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_p^{2p} f(t)e^{-st}dt&=\int_0^p f(T+p)e^{-s(T+p)}dT\\&=e^{-sp}\int_0^p f(T+p)e^{-sT}dT\end{aligned}$$

同理，積分式$\int_{2p}^{3p} f(t)e^{-st}dt$ 亦應作適當之變數變換，將積分範圍由$[2p,3p]$改寫爲$[0,p]$。此一變數變換係令：

$$t=T+2p$$

則當 $t=2p$ 時，$T=0$；當 $t=3p$ 時，$T=p$；而 $dt=d(T+2p)=dT+d(2p)=dT+0=dT$。因此，$\int_{2p}^{3p} f(t)e^{-st}dt$ 可改寫爲：

$$\begin{aligned}\int_{2p}^{3p} f(t)e^{-st}dt &= \int_0^p f(T+2p)e^{-s(T+2p)}dT \\ &= e^{-2sp}\int_0^p f(T+2p)e^{-sT}dT\end{aligned}$$

基於此，式(1)可改寫爲：

$$L\{f(t)\}=\int_0^p f(t)e^{-st}dt+e^{-sp}\int_0^p f(T+p)e^{-sT}dT+e^{-2sp}\int_0^p f(T+2p)e^{-sT}dT+\cdots \quad (2)$$

當積分式中有固定之上下限時，更換積分變數之符號並不會改變積分結果，故 $\int_0^p f(T+p)e^{-sT}dT \equiv \int_0^p f(t+p)e^{-st}dt$，$\int_0^p f(T+2p)e^{-sT}dT \equiv \int_0^p f(t+2p)e^{-st}dt$。又因爲 $f(t)$ 係週期爲 p 之函數，所以：

$$f(t)=f(t+p)=f(t+2p)=\cdots$$

因此，式(2)可再調整爲：

$$L\{f(t)\}=\int_0^p f(t)e^{-st}dt+e^{-sp}\int_0^p f(t)e^{-st}dt+e^{-2sp}\int_0^p f(t)e^{-st}dt+\cdots \quad (3)$$

上式提出同類項後，可得：

$$L\{f(t)\}=\left(1+e^{-sp}+e^{-2sp}+\cdots\right)\int_0^p f(t)e^{-st}dt \quad (4)$$

其中等比級數 $1+e^{-sp}+e^{-2sp}+\cdots$ 之值爲 $1/\left(1-e^{-sp}\right)$，故式(4)可整理爲：

$$\boxed{L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sp}}\int_0^p f(t)e^{-st}dt} \quad (5)$$

上式即為所欲證得之重要關係式。

附註：

1. 以上所推導出之關係式，筆者曾見過成為研究所考題，讀者應留意其推導過程。

2. 許多工程問題都可引用 Fourier 級數處理之，而 Fourier 級數則是由正弦函數和餘弦函數所組成，這些函數都是週期函數，因此需瞭解與週期函數有關之 Laplace 轉換的結果。