提要 177：*Laplace* 轉換公式 $L\{tf(t)\}=-dF(s)/ds$ 等的應用(II)

已知 $tf(t)$、$tf'(t)$、$tf''(t)$ 的 *Laplace* 積分轉換爲：

$$\boxed{L\{tf(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}}$$

$$\boxed{L\{tf'(t)\}=-s\frac{dF(s)}{ds}-F(s)}$$

$$\boxed{L\{tf''(t)\}=-s^2\frac{dF(s)}{ds}-2sF(s)+f(0)}$$

茲舉數例說明其應用方式。

範例一
試解微分方程式：$ty''+(1-t)y'+ny=0$

解答：

原式作 *Laplace* 積分轉換，則：

$$L\{ty''+(1-t)y'+ny\}=0 \tag{1}$$

上式可改寫爲先作 *Laplace* 轉換，再做相加之運算：

$$L\{ty''\}+L\{(1-t)y'\}+L\{ny\}=0 \tag{2}$$

已知：

$$L\{ty''(t)\}=-s^2\frac{dY(s)}{ds}-2sY(s)+y(0)$$

$$L\{ty'(t)\}=-s\frac{dY(s)}{ds}-Y(s)$$

$$L\{y'(t)\}=sY(s)-y(0)$$

$$L\{ty(t)\} = -\frac{dY(s)}{ds}$$

所以式(2)可繼續化簡爲：

$$\left[-s^2\frac{dY(s)}{ds} - 2sY(s) + y(0)\right] + [sY(s) - y(0)] - \left[-s\frac{dY(s)}{ds} - Y(s)\right] + nY(s) = 0$$

經整理後，可得：

$$(s - s^2)\frac{dY(s)}{ds} + (-s + n + 1)Y(s) = 0 \qquad (3)$$

解析式(3)之一階常微分方程式時，擬將相同的變數放在同一邊：

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{ds} = \frac{s-n-1}{s-s^2} = \frac{s-n-1}{s(1-s)}$$

上式等號右邊又可拆成簡單之部分分式，如以下所示：

$$\frac{1}{Y}\frac{dY}{ds} = \frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s} \qquad (4)$$

上式等號左右兩邊同時對 s 變數作積分：

$$\int \frac{1}{Y}\frac{dY}{ds}ds = \int\left(\frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}\right)ds + C \qquad (5)$$

其中$\int \frac{1}{Y}\frac{dY}{ds}ds = \int \frac{1}{Y}dY = \ln Y$ ，$\int\left(\frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}\right)ds = n\ln(s-1) - (n+1)\ln s$ ，故式(5)積分後可得：

$$\begin{aligned} \ln Y &= n\ln(s-1) - (n+1)\ln s + C \\ &= \ln(s-1)^n - \ln s^{n+1} + C \\ &= \ln\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} + C \end{aligned}$$

上式等號左右兩邊再同時取自然指數之運算：

$$\exp(\ln Y)=\exp\left[\ln\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}+C\right]$$
$$=\exp\left[\ln\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]\exp(C)$$
$$=\exp(C)\exp\left[\ln\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]$$

其中 $\exp(\ln Y)=Y$ ，$\exp\left[\ln\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right]=\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$ 。令 $\widetilde{C}=\exp(C)$，則上式可改寫爲：

$$Y=\widetilde{C}\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \tag{6}$$

式(6)再作 *Laplace* 反轉換，則時間域之解即可解出：

$$y(t)=L^{-1}\{Y(s)\}=L^{-1}\left\{\widetilde{C}\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right\} \tag{7}$$

其中 $\widetilde{C}$ 是常數，可以提至 *Laplace* 反轉換運算式之外。另外，由 *s*-平移定理知：

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}L^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t)$$

因此式(7)等號之右邊可加以改寫，故式(7)可表爲：

$$y(t)=L^{-1}\left\{\widetilde{C}\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}\right\}=\widetilde{C}L^{-1}\left\{\frac{(s-1)^n}{(s-1+1)^{n+1}}\right\}=\widetilde{C}e^{t}L^{-1}\left\{\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\right\} \tag{8}$$

已知：

$$L\{y^{(n)}(t)\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0)-s^{n-2}y'(0)-\cdots-sy^{(n-2)}(0)-y^{(n-1)}(0)$$

若考慮 $y(0)=y'(0)=\cdots=y^{(n-2)}(0)=y^{(n-1)}(0)=0$ ，則：

$$L\left\{y^{(n)}(t)\right\}=s^n Y(s)$$

或

$$L^{-1}\left\{s^n Y(s)\right\}=y^{(n)}(t)$$

基於此，式(8)可表爲：

$$y(t)=\widetilde{C}e^t L^{-1}\left\{\frac{s^n}{(s+1)^{n+1}}\right\}=\widetilde{C}e^t\frac{d^n}{dt^n}L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\right\} \tag{9}$$

再引用一次 s-平移定理：

$$L^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}L^{-1}\{F(s)\}=e^{at}f(t)$$

則式(9)中之 $L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\right\}$ 可改寫爲：

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^{n+1}}\right\}=e^{-t}L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}$$

又已知：

$$L^{-1}\left\{\frac{n!}{s^{n+1}}\right\}=t^n$$

所以：

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{s^{n+1}}\right\}=\frac{t^n}{n!}$$

故式(9)可表爲：

$$\boxed{y(t)=\tilde{C}e^{t}\frac{d^{n}}{dt^{n}}\left(e^{-t}\frac{t^{n}}{n!}\right)=\tilde{C}\frac{e^{t}}{n!}\frac{d^{n}\left(e^{-t}t^{n}\right)}{dt^{n}}} \tag{10}$$

當$\tilde{C}=1$時，上式稱爲 *Laguerre* 多項式，常以符號$L_n(t)$表示：

$$\boxed{L_n(t)=\frac{e^{t}}{n!}\frac{d^{n}\left(e^{-t}t^{n}\right)}{dt^{n}}}$$

範例二
試求：(a) $L\left\{te^{3t}\right\}$ (b) $L\left\{t^2e^{3t}\right\}$

解答：

(a) 因爲已知 $L\left\{tf'(t)\right\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以可考慮 $f'(t)=e^{3t}$，積分後之結果爲 $f(t)=\dfrac{e^{3t}}{3}$。因此 $L\left\{tf'(t)\right\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$ 可改寫爲：

$$L\left\{te^{3t}\right\}=-L\left\{\frac{e^{3t}}{3}\right\}-s\frac{d}{ds}L\left\{\frac{e^{3t}}{3}\right\}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{1}{3(s-3)}-s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3(s-3)}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{1}{3(s-3)}-s\left[-\frac{1}{3(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{1}{3(s-3)}+\frac{s}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=-\frac{s-3}{3(s-3)^2}+\frac{s}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=\frac{-s+3+s}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=\frac{3}{3(s-3)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\left\{te^{3t}\right\}=\frac{1}{(s-3)^2}$$

即問題(a)之解爲 $\boxed{L\left\{te^{3t}\right\}=\dfrac{1}{(s-3)^2}}$。

(b) 因爲已知$L\left\{tf'(t)\right\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以可考慮$f'(t)=te^{3t}$，積分後之結果爲$f(t)=\dfrac{te^{3t}}{3}-\dfrac{e^{3t}}{9}$。因此$L\left\{tf'(t)\right\}=-F(s)-s\dfrac{dF(s)}{ds}$可改寫爲：

$$L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-L\left\{\frac{te^{3t}}{3}-\frac{e^{3t}}{9}\right\}-s\frac{d}{ds}L\left\{\frac{te^{3t}}{3}-\frac{e^{3t}}{9}\right\}$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-L\left\{\frac{te^{3t}}{3}\right\}+L\left\{\frac{e^{3t}}{9}\right\}-s\frac{d}{ds}\left(L\left\{\frac{te^{3t}}{3}\right\}-L\left\{\frac{e^{3t}}{9}\right\}\right)$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-\frac{1}{3}L\left\{te^{3t}\right\}+\frac{1}{9}L\left\{e^{3t}\right\}-s\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{3}L\left\{te^{3t}\right\}-\frac{1}{9}L\left\{e^{3t}\right\}\right)$$

由(a)知$L\left\{te^{3t}\right\}=\dfrac{1}{(s-3)^2}$，故上式可進一步改寫爲：

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{s-3}-s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}-\frac{1}{9}\frac{1}{s-3}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=-\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}+\frac{1}{9}\frac{s-3}{(s-3)^2}-s\frac{d}{ds}\left[\frac{1}{3}\frac{1}{(s-3)^2}-\frac{1}{9}\frac{s-3}{(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{-3+s-3}{(s-3)^2}-s\frac{d}{ds}\left[-\frac{1}{9}\frac{-3+s-3}{(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\frac{d}{ds}\left[\frac{s-6}{(s-3)^2}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\left[\frac{1}{(s-3)^2}-\frac{2(s-6)}{(s-3)^3}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\left[\frac{s-3}{(s-3)^3}-\frac{2(s-6)}{(s-3)^3}\right]$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\frac{s-3-2s+12}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s-6}{(s-3)^2}+\frac{s}{9}\frac{-s+9}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{(s-6)(s-3)}{(s-3)^3}+\frac{s}{9}\frac{-s+9}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s^2-9s+18}{(s-3)^3}+\frac{s}{9}\frac{-s+9}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{s^2-9s+18-s^2+9s}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{1}{9}\frac{18}{(s-3)^3}$$

$$\Rightarrow \quad L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{2}{(s-3)^3}$$

即問題(b)之解爲$\boxed{L\left\{t^2e^{3t}\right\}=\frac{2}{(s-3)^3}}$。

表 1　常用之 17 個 *Laplace* 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$
t^2	$\dfrac{2}{s^3}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\dfrac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\dfrac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\dfrac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\dfrac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)=\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]\left[\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right]$