提要 176：*Laplace* 轉換公式 $L\{tf(t)\}=-dF(s)/ds$ 等的應用(I)

已知 $tf(t)$ 的 *Laplace* 積分轉換為：

$$\boxed{L\{tf(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}}$$

茲舉數個例題說明其應用方式。

範例一
試證明以下所示之基本關係式：

$F(s)$	$f(t)$
$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}[\sin(at)-at\cos(at)]$
$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a}\sin(at)$
$\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]$

解答：

❶ $L\left\{\frac{t}{2a}\sin(at)\right\}=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ 的證明

因為 $L\{tf(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}$、或 $-tf(t)=L^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\}$，所以要想一想，要如何找到

一個適當的 $F(s)$，使得 $\frac{dF(s)}{ds}$ 等於 $\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$ 。由觀察知，若考慮：

$$\frac{dF(s)}{ds}=\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$$

則 $F(s)$ 應爲：

$$F(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+a^2}$$

而 $F(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+a^2}$ 的 *Laplace* 反轉換爲：

$$f(t)=L^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+a^2}\right\}=-\frac{1}{2a}\sin(at)$$

已知：

$$L^{-1}\left\{\frac{dF(s)}{ds}\right\}=-tf(t)=-tL^{-1}\{F(s)\}$$

且 $F(s)=-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+a^2}$ ，所以：

$$\begin{aligned}L^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+a^2)^2}\right\}&=L^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+a^2}\right)\right\}\\&=-tf(t)\\&=-tL^{-1}\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{s^2+a^2}\right\}\\&=\frac{t}{2a}L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}\end{aligned}$$

又 $L^{-1}\left\{\frac{a}{s^2+a^2}\right\}=\sin(at)$，所以：

$$\boxed{L^{-1}\left\{\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}\right\}=\frac{t}{2a}\sin(at)}$$

故得證。

另證

因爲 $L\{tf(t)\}=-\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以：

$$\begin{aligned}
L\left\{\frac{t}{2a}\sin(at)\right\}&=-\frac{dF(s)}{ds}\\
&=-\frac{d}{ds}L\left\{\frac{1}{2a}\sin(at)\right\}\\
&=-\frac{1}{2a}\frac{d}{ds}L\{\sin(at)\}\\
&=-\frac{1}{2a}\frac{d}{ds}\left(\frac{a}{s^2+a^2}\right)\\
&=-\frac{1}{2a}\frac{-2as}{\left(s^2+a^2\right)^2}\\
&=\frac{s}{\left(s^2+a^2\right)^2}
\end{aligned}$$

故得證。

❷ $L\left\{\dfrac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]\right\}=\dfrac{s^2}{\left(s^2+a^2\right)^2}$ 的證明

因爲 $L\{tf(t)\}=-\dfrac{dF(s)}{ds}$，所以：

$$\begin{aligned}
L\left\{\frac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]\right\}&=L\left\{\frac{1}{2a}\sin(at)\right\}+L\left\{\frac{t}{2}\cos(at)\right\}\\
&=\frac{1}{2a}L\{\sin(at)\}+\frac{1}{2}L\{t\cos(at)\}
\end{aligned}$$

其中 $L\{\sin(at)\}$ 與 $L\{t\cos(at)\}$ 分別爲：

$$L\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$

$$\begin{aligned}L\{t\cos(at)\}&=-\frac{dF(s)}{ds}\\&=-\frac{d}{ds}L\{\cos(at)\}\\&=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\\&=-\frac{(s^2+a^2)-s(2s)}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\end{aligned}$$

所以，$L\left\{\frac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]\right\}$之結果整理爲：

$$\boxed{\begin{aligned}L\left\{\frac{1}{2a}[\sin(at)+at\cos(at)]\right\}&=\frac{1}{2a}L\{\sin(at)\}+\frac{1}{2}L\{t\cos(at)\}\\&=\frac{1}{2a}\frac{a}{s^2+a^2}+\frac{1}{2}\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{s^2+a^2+s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{1}{2}\frac{2s^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\end{aligned}}$$

故得證。

❸ $L\left\{\frac{1}{2a^3}[\sin(at)-at\cos(at)]\right\}=\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$ 的證明

原式可改寫爲：

$$L\left\{\frac{1}{2a^3}\left[\sin(at)-at\cos(at)\right]\right\}=L\left\{\frac{1}{2a^3}\sin(at)\right\}-L\left\{\frac{t}{2a^2}\cos(at)\right\}$$
$$=\frac{1}{2a^3}L\{\sin(at)\}-\frac{1}{2a^2}L\{t\cos(at)\}$$

其中：

$$L\{\sin(at)\}=\frac{a}{s^2+a^2}$$
$$\begin{aligned}L\{t\cos(at)\}&=-\frac{dF(s)}{ds}\\&=-\frac{d}{ds}L\{\cos(at)\}\\&=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+a^2}\right)\\&=-\frac{(s^2+a^2)-s(2s)}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\end{aligned}$$

所以：

$$\boxed{\begin{aligned}L\left\{\frac{1}{2a^3}\left[\sin(at)-at\cos(at)\right]\right\}&=L\frac{1}{2a^3}L\{\sin(at)\}-\frac{1}{2a^2}L\{t\cos(at)\}\\&=\frac{1}{2a^3}\frac{a}{s^2+a^2}-\frac{1}{2a^2}\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{1}{2a^2}\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{1}{2a^2}\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{1}{2a^2}\frac{s^2+a^2-s^2+a^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{1}{2a^2}\frac{2a^2}{(s^2+a^2)^2}\\&=\frac{1}{(s^2+a^2)^2}\end{aligned}}$$

故得證。

範例二

試求：(a) $L\{te^{3t}\}$ (b) $L\{t^2e^{3t}\}$

解答：

(a) 因爲已知 $L\{tf(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}$，所以

$$L\{te^{3t}\}=-\frac{d}{ds}L\{e^{3t}\}$$
$$\Rightarrow L\{te^{3t}\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$
$$\Rightarrow L\{te^{3t}\}=\frac{1}{(s-3)^2}$$

即問題(a)之解爲 $\boxed{L\{te^{3t}\}=\frac{1}{(s-3)^2}}$。

(b) 因爲已知 $L\{tf(t)\}=-\frac{dF(s)}{ds}$，所以

$$L\{t^2e^{3t}\}=-\frac{d}{ds}L\{te^{3t}\}$$

又由(a)知 $L\{te^{3t}\}=\frac{1}{(s-3)^2}$，故

$$\Rightarrow L\{t^2e^{3t}\}=-\frac{d}{ds}\frac{1}{(s-3)^2}$$
$$\Rightarrow L\{t^2e^{3t}\}=\frac{2}{(s-3)^3}$$

即問題(b)之解爲 $\boxed{L\{t^2e^{3t}\}=\frac{2}{(s-3)^3}}$。

範例三

試求：(a) $L\{t\cos(3t)\}$ (b) $L\{t\sin(3t)\}$

解答：

(a) 因爲已知 $L\{tf(t)\}=-\dfrac{dF(s)}{ds}$ ，所以

$$L\{t\cos(3t)\}=-\frac{d}{ds}L\{\cos(3t)\}$$

$$\Rightarrow\ L\{t\cos(3t)\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+3^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L\{t\cos(3t)\}=-\frac{1}{s^2+3^2}+\frac{2s^2}{\left(s^2+3^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\{t\cos(3t)\}=\frac{-s^2-3^2+2s^2}{\left(s^2+3^2\right)^2}$$

$$\Rightarrow\ L\{t\cos(3t)\}=\frac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}$$

即問題(a)之解爲 $\boxed{L\{t\cos(3t)\}=\dfrac{s^2-9}{\left(s^2+9\right)^2}}$ 。

(b) 因爲已知 $L\{tf(t)\}=-\dfrac{dF(s)}{ds}$ ，所以

$$L\{t\sin(3t)\}=-\frac{d}{ds}L\{\sin(3t)\}$$

$$\Rightarrow\ L\{t\sin(3t)\}=-\frac{d}{ds}\left(\frac{3}{s^2+3^2}\right)$$

$$\Rightarrow\ L\{t\sin(3t)\}=\frac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}$$

即問題(b)之解爲 $\boxed{L\{t\sin(3t)\}=\dfrac{6s}{\left(s^2+9\right)^2}}$ 。

表 1　常用之 17 個 *Laplace* 積分轉換暨反轉換公式

$f(t)$	$F(s)$
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^2	$\frac{2}{s^3}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)=s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)=s^2\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt-sf(0)-f'(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-sf^{(n-2)}(0)-f^{(n-1)}(0)$ 其中 $F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t-a)$	e^{-as}
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)=\int_0^\infty f(t)e^{-(s-a)t}dt$
$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as}F(s)=e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$
$\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)=\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right]\left[\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt\right]$